DM10

Correction du devoir maison

Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

I. Intégrales de Wallis

1. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - u$ d'où $dx = -du$. On obtient alors :

$$W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)\, dx$$

2. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1} t - \sin^n t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(\sin t - 1)dt \leq 0$$

puisque pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin^n t(1 - \sin t) \leq 0$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin t$, donc $0 \leq \sin^n t$. Par positivité de l'intégrale, on a $W_n \geq 0$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge par le théorème de la limite monotone.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, supposons que $W_n = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui est absurde (elle vaut 1 en $\dfrac{\pi}{2}$). Ainsi, $W_n \neq 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{n+1} t = \Big[\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(n+1)(-\cos t \sin^n t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t(1 - \sin^2 t)dt \\
&= (n+1)W_n - (n+1)IWn + 2.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, Notons $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. On a

$$J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n - (n+1)W_nW_{n+1} = 0$$

donc $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, de valeur $W_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq I_n$ (car la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante). Comme $W_n > 0$ (d'après les questions 2 et 3), on en déduit que :

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

avec la question 4.
Le théorème de convergence par encadrement nous donne alors $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $W_n \underset{n}{\sim} W_{n+1}$.

8. On sait $W_{n+1} \underset{n}{\sim} W_n$ donc $J_n \underset{n}{\sim} nW_n^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $nW_n^2 \underset{n}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.
   Finalement, on en déduit que $W_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.

9. De la relation de récurrence de la question 4, on obtient, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} \\
&= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{(2p)(2p-2)(2p-4)} I_{2p-6} = \cdots = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2} W_0. \\
&= \frac{[(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1]\times[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]}{[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

   et de même :

$$\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} \\
&= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)} I_{2p-5} = \cdots = \frac{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 3} W_1 \\
&= \frac{[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]^2}{[(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 3]\times[(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2]} \\
&= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

II. Intégrale de Gauss

1. La fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ (continue sur $\mathbb{R}$), elle est donc dérivable, et pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. F est donc strictement croissante.

2. Pour $x \in [1, +\infty[$, on a $1 \leq x$, donc en multipliant par $x > 0$, $x \leq x^2$ et $-x^2 \leq -x$. En appliquant exp, croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

3. Soit $x \in [1, +\infty[$. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt = F(1) + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt \\
&= F(1) + \Big[-e^{-t}\Big]_1^x = F(1) + e - e^{-x} \leq F(1) + e
\end{aligned}$$

   puisque, par la question précédente, pour tout $t \in [1, x]$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt$.
   Par suite, F est croissante et majorée (par $F(1) + e$). Elle admet donc une limite en $+\infty$.

4. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $u \mapsto u - \ln(1+u)$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont), et pour $u \in]-1, +\infty[$, $f'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$ est de même signe que u. f est donc décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, donc admet un minimum en 0.

   On a $f(0) = 0$, donc pour tout $u \in]-1, +\infty[$, $f(u) \geq f(0) = 0$, ce qui montre que $\ln(1+u) \leq u$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour $t \in [0, \sqrt{n}[$, la question précédente donne (puisque $-\frac{t^2}{n} \in]-1, 0]$) $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$. Comme $n > 0$, on en déduit que $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$ et comme exp est croissante,

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq e^{-t^2} \text{ i.e. } \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

Cette dernière inégalité reste vraie lorsque $t = \sqrt{n}$, donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

(b) Le changement de variable $t = \sqrt{n} \cos u$ équivaut à $u = \arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Il donne $dt = -\sqrt{n} \sin u du$ et les bornes deviennent $\frac{\pi}{2}$ et 0 :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 u)^n(-\sqrt{n} \sin u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^n \sin u du$$
$$= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du = \sqrt{n} w_{2n+1}.$$

Finalement,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t^2}{n} \in \mathbb{R}_+$, et par la question 1, $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$. Comme $-n < 0$, on en déduit que $-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2$. Comme exp est croissante on en déduit que :

$$e^{-t^2} \leq \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

(b) On pose le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan u$ dans l'intégrale proposée, qui équivaut à $u = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Ceci transforme dt en $\sqrt{n}(1 + \tan^2 u) du$ et les bornes en 0 et $B = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. On obtient donc :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 u)^{-n} \sqrt{n}(1 + \tan^2 u) du$$
$$= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{n-1} du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2p} u du$$

avec $p = n - 1$.

(c) On pose le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ pour trouver :

$$\int_0^B \cos^{2p} t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - B} \cos^{2p}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_{\frac{\pi}{2} - B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} u du.$$

(d) D'après la question (b) et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t dt = \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u du \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

puisque $\sin^{2n-2} u \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

7. D'après les questions 6. et 7., on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Or, d'après A.8, on a $\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}W_{2n} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où $\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même, $\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}W_{2n}\frac{\pi}{4} \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

À RETENIR. Valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$