

Nombres complexes

Formes algébriques et trigonométriques

Exercice 7.1 (★★)

Déterminer la forme algébrique de :

$$z_1 = \frac{e^{2i\theta}}{1-i}; \quad \left| \quad z_2 = (\sqrt{3}-i)^{2015}; \quad \left| \quad z_3 = (1+e^{i\theta})^n; \quad \left| \quad z_4 = \frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} \quad \text{où} \right. \right.$$

$$\left. \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[. \right.$$

Exercice 7.2 (★★)

Trouver les modules et arguments de :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}; \quad \left| \quad z_2 = 1+i \tan(\theta) \quad \text{où} \quad \left| \quad z_3 = 1+i\theta; \quad \left| \quad z_4 = \frac{1+\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i \sin(\theta)} \right. \right.$$

$$\left. \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[; \right.$$

Exercice 7.3 (★★)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

1. Montrer que $|z^3 + 2iz| \leq 3$.
 2. Quels sont les z pour lesquels cette inégalité est en fait une égalité ?
-

Exercice 7.4 (★)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 7.5 (★★)

Pour quelles valeurs de n , le nombre complexe $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3} \right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 7.6 (★★★)

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, de forme algébrique $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que l'argument principal de z est $\theta = 2 \arctan \left(\frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right)$.

Exercice 7.7 (★★)

Résoudre dans \mathbb{C} :

$$(i) \quad e^z + 1 = 0; \quad \left| \quad (ii) \quad e^z = 1 + i\sqrt{3}; \quad \left| \quad (iii) \quad e^z + e^{-z} = 1. \right.$$

Applications au calcul trigonométrique et algébrique

Exercice 7.8 (★★)

Linéariser $\sin^5(x)$, $\cos(x)\sin^4(x)$ et $\cos^2(2x)\sin^3(3x)$.

Exercice 7.9 (★★) Calculer la fraction $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 7.10 (★)

Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 7.11 (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.

Indication : calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes.

Exercice 7.12 (★★★)

Calculer les sommes suivantes (où $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \cos(a+kb) \quad B_n = \sum_{k=0}^n \sin(a+kb) \quad C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a+kb) \quad D_n = \sum_{k=0}^n \cos^k(a) \sin(ka)$$

Racines n -èmes

Exercice 7.13 (★)

Déterminer les racines cinquièmes de j et de $\frac{2\sqrt{2}}{i-1}$.

Exercice 7.14 (★★)

On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

- Calculer $u + v$, puis u^2 en fonction de u .
 - En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.
-

Exercice 7.15 (★★★)

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes (où $n \geq 2$) :

$$(E_1) : \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2 \cos(n\theta) \text{ où } \theta \in \left]0, \frac{2\pi}{n}\right[; \quad (E_2) : z^n = \bar{z}.$$

Exercice 7.16 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

2. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1 + \omega)^n$.

Exercice 7.17 (★★★ - Banque CCINP 89)

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$ et soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument du complexe $\zeta^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} |\zeta^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 7.18 (★★★★ - Polynômes de Tchebychev)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver qu'il existe des entiers a_0, a_1, \dots, a_n tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k(\theta)$.
2. Montrer que $a_n = 2^{n-1}$.
3. Soit $w = \frac{3-4i}{5}$. Vérifier que $w \in \mathbb{U}$, mais que $w \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire que w n'est pas une racine de l'unité.

Exercice 7.19 (★★★★ - Irrationalité de $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ (Oral ENS))

Notons $\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi}$. Le but de cet exercice est de prouver que α est irrationnel, i.e. $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

1. Donner la forme algébrique de $e^{i\pi\alpha}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers a_n et b_n tels que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, et tels que $a_n - b_n$ ne soit pas divisible par 3. Conclure.

Équations polynomiales dans \mathbb{C}

Exercice 7.20 (★★)

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | |
|---|---|
| (i) $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$; | (iii) $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$; |
| (ii) $2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$
sachant qu'elle admet une racine réelle ; | (iv) $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$; |
| | (v) (★) $z^2 + 2 z - 3 = 0$. |

Exercice 7.21 (★★)

1. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=3-2i \\ xy=5-i \end{cases}$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$ existe-t-il des rectangles pour lesquels l'aire a et le périmètre p sont reliés par la relation $p = \lambda\sqrt{a}$?

Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 7.22 (★★)

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- | | | |
|--|---|--|
| (i) $z, \frac{1}{z}$ et $1+z$ ont le même module ; | (ii) $1, z$ et z^2 forment un triangle rectangle en z ; | (iii) $z, \frac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés. |
|--|---|--|

Exercice 7.23 (★★ - Théorème de l'angle au centre)

1. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que

$$z = \frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \text{ est un réel positif.}$$

2. Soient A, B et C trois points distincts appartenant à un même cercle de centre O . Montrer l'égalité suivante entre angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Exercice 7.24 (★★★ - Concours Centrale PSI)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note p et q ses deux racines carrées. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M .

Exercice 7.25 (★★★)

Soient A, B, C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c . On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer j^2 et en déduire une expression de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j .
2. Montrer que ABC est équilatéral direct (c'est-à-dire avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$) si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.
3. Montrer que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 7.26 (★★ - Similitudes directes)

1. Caractériser géométriquement les similitudes associées à $f : z \mapsto (2i + 1)z - 1$ et $g : z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$.
2. Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(-1, 0)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Caractériser géométriquement $T \circ R \circ T$ et $R \circ T \circ R$.

Exercice 7.27 (★★★★ - Théorème de Ménélaüs)

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ? de deux translations ? de deux homothéties ? d'une homothétie et d'une translation ?

Pour chaque composée, on identifiera la transformation obtenue et on en donnera ses éléments caractéristiques.

2. Soient ABC un triangle non aplati, et $M \in (AB), N \in (AC), P \in (BC)$. Montrer que :

$$M, N, P \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Pour ce faire, on introduira les homothéties h_M de centre M transformant B en A , h_N de centre N transformant A en C , h_P de centre P transformant C en B , et on considèrera $f = h_P \circ h_N \circ h_M$.