TD31

Moments d'une variable aléatoire

Loi, espérance, variance d'une variable aléatoire

Exercice 31.1 (★)

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ ou par $\beta \in]0,1[$ avec probabilité $q = 1-p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n le nombre de jours entre 1 et n où l'action monte, et S_n la valeur de l'action le jour n.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Exprimer S_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 31.2 (★★ - Loi triangulaire)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 2n-1]\!]$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X = i) = \lambda i, \quad \forall i \in [\![n+1, 2n-1]\!],\ P(X = i) = \lambda(2n - i)$$

où λ est un réel fixé.

1. À quelle condition sur λ définit-on ainsi la loi d'une variable aléatoire ?
2. Prouver alors que X et $2n - X$ ont même loi. En déduire $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$.

Exercice 31.3 (★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules, on note X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 31.4 (★★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le jeton i est dans la poignée tirée » et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement A_i ? En déduire la loi de Y_i.
2. Exprimer X en fonction des Y_i, et en déduire $E(X)$.

Exercice 31.5 (★★)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$.
2. **Application :** une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement et sans remise. On note alors X_i la variable aléatoire égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, et on note X la variable aléatoire égale au plus grand entier k tel que $X_1 < X_2 < \cdots < X_k$.

   Déterminer les valeurs de $P(X \geq k)$, et en déduire $E(X)$.

Exercice 31.6 (★★ - Fonction génératrice - ✍)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G_X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ ($p \in]0,1[$) puis $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 0,n \rrbracket)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.
4. Montrer que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.
5. Montrer que si X et Y, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

Exercice 31.7 (★★)
Un téléphone contient $n \geq 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1. Déterminer le support de X_k.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X_k = 1)$ et $P(X_k = k)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, prouver que pour tout $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1)$.
4. Donner alors une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$, puis l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.

Exercice 31.8 (★★★ - Une loi finie est caractérisée par ses moments)
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Montrer que X et Y ont même loi si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $E\left(X^k\right) = E\left(Y^k\right)$.

Exercice 31.9 (★★★)
Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = \alpha$ et $E(X^2) = E(X^4) = 1$. Montrer que $\alpha \in [-1,1]$, puis déterminer la loi de X.

Exercice 31.10 (★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $4n$ et $1/2$.

1. Majorer $P(X \geq 3n)$ à l'aide de l'inégalité de Markov. Commenter.
2. Obtenir une meilleure majoration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev. Commenter.
3. Obtenir une autre majoration, en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire 2^X. Quelle est la meilleure ?

Couples et n-uplets de variables aléatoires

Exercice 31.11 (★★ - Une caractérisation algébrique de l'indépendance)
Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ (où les x_i et les y_i sont deux à deux distincts). Pour $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket$, on note $m_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.
Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est de rang 1.

Exercice 31.12 (★★)
Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, $p \in]0,1[$. On pose, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, Y_i = X_i X_{i+1}$. Montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si, et seulement si, $|i-j| > 1$.

Exercice 31.13 (★★)
Soient X et Y des variables indépendantes sur (Ω, P), suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 31.14 (★★ - Banque CCP)
Un téléconseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.
2. Le téléconseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{[X=i]}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (c) Déterminer alors l'espérance et la variance de Z, ainsi que $E(Y)$.

Exercice 31.15 (★★)
Soit $n \geq 1$. On considère $X_0, \dots, X_n, N$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé (Ω, P), telles que $X_0, \dots, X_n$ suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et N suit la loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de $M_k = \min(X_0, \dots, X_k)$.
2. Déterminer la loi de $M = \min(X_0, \dots, X_N)$.

Exercice 31.16 (★★★)
Soient un entier $n \geq 1$ et $p \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et telles que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et Y est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
Que pensez vous de l'équivalence suivante : Y suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ si, et seulement si, $X + Y$ suit la loi $\mathscr{B}(2n, p)$?

Exercice 31.17 (★★★★ - Déterminant aléatoire (Oral Mines MP 2017))
Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires réelles $A_{i,j}$ centrées, réduites, identiquement distribuées et mutuellement indépendantes sur un univers probabilisé fini (Ω, P). Calculer $E(\det(A))$ et $V(\det(A))$.

Covariance

Exercice 31.18 (★)
Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	b_1	b_2	b_3
a_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

où $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{(a_2 - a_1)(2b_1 - b_2 - b_3)}{25}$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 31.19 (★ - ✍)
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P([X = 1])P([Y = 1])$.
2. Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

Exercice 31.20 (★★)
Soient $p \in]0, 1[$ et $n > 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 31.21 (★★)
On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i. En déduire $E(X)$.
2. Pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, déterminer la loi de X_iX_j. En déduire $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer $V(X)$.

Exercice 31.22 (★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer la loi de $S = \max(X, Y)$, puis calculer $E(S)$.
2. En déduire l'espérance de $T = \min(X, Y)$.
3. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance de ST, puis la covariance de S et T.

Exercice 31.23 (★★ - Loi trinomiale)
Soit $n \geq 2$, et soient $p, q \in]0, 1[$ tels que $p + q < 1$.

1. Montrer qu'on définit bien une loi conjointe en posant pour tout $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$:
$$P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^k q^\ell (1 - p - q)^{n-k-\ell}.$$
Proposer une expérience probabiliste modélisée par cette loi.
Dans la suite, on considère un couple (X, Y) de variables dont la loi conjointe est donnée ci-dessus.
2. Déterminer les lois de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = n - X - Y$. En déduire $V(X + Y)$, puis $\text{Cov}(X, Y)$.
