TD27

Séries numériques

Études de convergence

Exercice 27.1 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n(n+\ln(n))}$

b) $\sum \left(n - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

c) $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$

d) $\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$

e) $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

f) $\sum \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$

g) $\sum \frac{\arctan(n)}{n^2}$

h) $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

i) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

j) $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

k) $\sum \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$

l) $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

m) $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln n)^{1000}$

n) $\sum \ln\left(\frac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1}\right)$

o) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

p) $\sum_{n\geq 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right)$

Exercice 27.2 (★★)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

(i) $\max(u_n, v_n)$; (ii) u_n^2 ; (iii) $\sqrt{u_n v_n}$; (iv) $\sqrt{u_n u_{2n}}$.

Exercice 27.3 (★★)

Soit (u_n) une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Montrer que (nu_n) converge vers 0.

Exercice 27.4 (★★ - Banque CCP)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 27.5 (★★★ - Séries à paramètres)

Étudier la nature des séries suivantes suivant la valeur des paramètres :

(i) $\sum \left[\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n - 1\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\sum (\arctan(n+a) - \arctan(n))$, $a \in \mathbb{R}_+^*$;

(iii) $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$;

(iv) $\sum \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}$, $p \in \mathbb{N}$;

(v) $\sum \frac{n^a}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$;

(vi) $\sum \arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

Exercice 27.6 (★★)

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

(i) $u_n = \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$

(ii) $u_n = \sin(n)\frac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}}$

(iii) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n + 1}$

(iv) $\sum \frac{(-1)^n}{\binom{4n}{2n}}$

(v) $u_1 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{\sin(u_n)}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 27.7 (★★)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire la nature de $\sum \sin\left[\pi(1+\sqrt{3})^n\right]$.

Exercice 27.8 (★★)

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

(i) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$;

(ii) $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$;

(iii) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$;

(iv) $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(v) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$;

(vi) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}\left(1+\frac{\sin(n)}{n^{3/4}}\right)^{-1}$.

Exercice 27.9 (★★ - Banque CCP)

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 27.10 (★★)

1. Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ et $R_n - R_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.
   (b) En déduire que $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide du critère spécial des séries alternées.

Exercice 27.11 (★★★)

Déterminer en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$

Calculs de sommes

Exercice 27.12 (★)

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \qquad \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

Exercice 27.13 (★★)

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 27.14 (★★ - Séries géométriques dérivées)

On fixe un entier naturel p ainsi qu'un réel x tel que $0 \leq x < 1$.

1. Démontrer que la série $\sum_{k \geq p} \binom{k}{p} x^k$ converge. On pose $S_p = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

2. Calculer $x(S_p + S_{p+1})$. En déduire une expression simple de S_p en fonction de p et x.

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p}$.

Exercice 27.15 (★★★)
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 27.16 (★★★)
Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{n^2}{n!} \;; \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} \;; \qquad \sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \;; \qquad \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, dt.$$

Comparaisons séries-intégrales

Exercice 27.17 (★★ - Séries de Bertrand)
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand*.

1. Montrer que la série diverge si $\alpha < 1$, et converge si $\alpha > 1$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ grâce à une comparaison série-intégrale.

3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

Exercice 27.18 (★★)
En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n} \;; \qquad \ln(n!) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\ln(n) \;; \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 27.19 (★★)

1. Soit $\alpha \in]0,1[$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{S_n}$.

2. Soit $\alpha > 1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$.

Divers

Exercice 27.20 (★★ - Développement en série entière de $\ln(1-x)$)

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Exercice 27.21 (★★ - Règle de Raabe-Duhamel)

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(n^a u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.

c) Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n$ converge ?

d) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 27.22 (★★★)

1. Soit x un réel. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge. On note $f(x)$ sa somme.
2. Soient x et y deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.
   En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 1$ et que $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
4. Posons pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(f(t))^2}$. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis que $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 27.23 (★★★ - Application des séries à l'étude des suites (Oral Centrale))

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Étudier la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
   En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.
3. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} A n^\alpha$.

Exercice 27.24 (★★★)

On énumère en ordre croissant les nombres premiers par une suite $(p_n)_{n \geq 1}$: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que :
$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - 1/p_n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.
