TD25

Séries numériques

Études de convergence

Exercice 25.1 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n(n+\ln(n))}$

b) $\sum \left(n - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

c) $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$

d) $\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}}$

e) $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

f) $\sum \frac{n^2\ln(n)}{e^n}$

g) $\sum \frac{\arctan(n)}{n^2}$

h) $\sum \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

i) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{n}{n-1}\right)$

j) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

k) $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

l) $\sum \frac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$

m) $\sum \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln n)^{1000}$

n) $\sum \ln\left(\frac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1}\right)$

o) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

p) $\sum \arccos\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 25.2 (★★)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux :

(i) $\max(u_n, v_n)$; (ii) u_n^2 ; (iii) $\sqrt{u_n v_n}$; (iv) $\sqrt{u_n u_{2n}}$.

Exercice 25.3 (★★★ - Banque CCINP)

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 25.4 (★★★ - Séries à paramètres)

Étudier la nature des séries suivantes suivant la valeur des paramètres :

(i) $\sum \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$, $p\in\mathbb{N}$;

(ii) $\sum \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n - 1\right]$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

(iii) $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$, $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$;

(iv) (★) $\sum (\arctan(n+a)-\arctan(n))$, $a\in\mathbb{R}_+^*$;

(v) (★) $\sum \frac{n^a}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$;

(vi) (★) $\sum \arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$, $\alpha>0$.

Exercice 25.5 (★★)

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

(i) $u_n = \frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$;

(ii) $u_n = \sin(n)\frac{\ln(n)^2-\ln(n)}{n\sqrt{n}}$;

(iii) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n+1}$;

(iv) $\sum \frac{(-1)^n}{\binom{4n}{2n}}$;

(v) $u_1\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{\sin(u_n)}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 25.6 (★★★)

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire la nature de $\sum \sin\left[\pi(1+\sqrt{3})^n\right]$.

Exercice 25.7 (★★★)

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

(i) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$;

(ii) $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$;

(iii) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$;

(iv) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}\left(1+\frac{\sin(n)}{n^{3/4}}\right)^{-1}$;

(v) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 25.8 (★★★ - Banque CCP)
On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 25.9 (★★★)

1. Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ et $R_n - R_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

   (b) En déduire que $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, puis la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide du critère spécial des séries alternées.

Calculs de sommes

Exercice 25.10 (★★)
Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right), \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n-1}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}.$$

Exercice 25.11 (★★)
On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 25.12 (★★ - Séries géométriques dérivées - ✍)
On fixe un entier naturel p ainsi qu'un réel x tel que $0 \leq x < 1$.

1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq p}\binom{k}{p}x^k$ converge. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k$.
2. Calculer $x(S_p + S_{p+1})$. En déduire une expression simple de S_p en fonction de p et x.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^{k-p}$.
4. **Application.** Établir la convergence et déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+3n}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n^2+n+1)e^{-n}$.

Exercice 25.13 (★★ - Développement en série entière de arctan)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.
2. En déduire que : $\left| \arctan(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.

Exercice 25.14 (★★★)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 25.15 (★★★)

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{n^2}{n!}$; | $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$; | $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$; | $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \,\mathrm{d}t$.

Comparaisons séries-intégrales

Exercice 25.16 (★★★ - Séries de Bertrand - ✍)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand.*

1. Montrer que la série diverge si $\alpha < 1$, et converge si $\alpha > 1$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ grâce à une comparaison série-intégrale.
3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

Exercice 25.17 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
2. On pose $w_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
   (a) Déterminer deux constantes α et K telles que $w_n - w_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\alpha}$.
   (b) En déduire que la série $\sum (w_n - w_{n-1})$ converge.
   (c) Montrer l'existence d'une constante réelle β telle que $S_n = 2\sqrt{n} + \beta + o(1)$.

Exercice 25.18 (★★★)

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}\ ; \qquad \ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)\ ; \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 25.19 (★★★)

1. Soit $\alpha \in]0,1[$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{S_n}$.

2. Soit $\alpha > 1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{R_n}{S_n}$.

Divers

Exercice 25.20 (★★★ - Application des séries à l'étude des suites (Oral Centrale))

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Étudier la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

   En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

3. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^\alpha$.

Exercice 25.21 (★★★★)

1. Soit x un réel. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge. On note $f(x)$ sa somme.

2. Soient x et y deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.

   En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 1$ et que $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

4. Posons pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(f(t))^2}$. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis que $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 25.22 (★★★★)

On énumère en ordre croissant les nombres premiers par une suite $(p_n)_{n\geq 1}$: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que :

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - 1/p_n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

Exercice 25.23 (★★★★★ - Oral Polytechnique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = n(u_n - u_{n+1}).$$

Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
