

Développements limités

Calculs de développements limités

Exercice 22.1 (★ - Des sommes)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$$f_1 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x), n = 4 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, n = 3 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x), n = 3 ;$$

$$f_4 : x \mapsto e^{-x} + \ln(1+x), n = 5.$$

Exercice 22.2 (★★ - Des produits)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{sh}(x) \tan(x), n = 3 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sin(x) \sqrt{1+x} \ln(1-2x), n = 4 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}, n = 3 ;$$

$$f_4 : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2) \arctan(x), n = 5.$$

Exercice 22.3 (★★★ - Encore des produits (en anticipant les ordres))

Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre n .

$$f_1 : x \mapsto \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right) (\cos(x) - 1),$$

$$n = 6 ;$$

$$f_2 : x \mapsto (1 - \cos(2x))(e^{-x} - 1)(x - \sin(x)),$$

$$n = 7.$$

Exercice 22.4 (★★ - Des compositions)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$$f_1 : x \mapsto e^{\sin(x)}, n = 4 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \sqrt{1 + \operatorname{sh}(x)}, n = 3 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(1 + \cos(x)), n = 3 ;$$

$$f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}, n = 3 ;$$

$$f_5 : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}, n = 3 ;$$

$$f_6 : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}, n = 3.$$

Exercice 22.5 (★★ - Des quotients)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}, n = 2 ;$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)}, n = 4 ;$$

$$f_3 : x \mapsto \operatorname{th}(x), n = 5 ;$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2}}{x \arctan(x)}, n = 5.$$

Exercice 22.6 (★★ - Développements limités ailleurs que 0)Calculer le développement limité des fonctions suivantes en a à l'ordre n :

$f_1 : x \mapsto \ln(x), a = e, n = 4 ;$

$f_2 : x \mapsto e^x, a = 1, n = 4 ;$

$f_3 : x \mapsto \cos(x), a = \frac{\pi}{3}, n = 4 ;$

$f_4 : x \mapsto \arcsin(x)^2, a = \frac{1}{\sqrt{2}}, n = 2 ;$

$f_5 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, a = 1, n = 3.$

Exercice 22.7 (★★★ - Plus difficile)Calculer le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre n :

$f_1 : x \mapsto (1 + \arctan(x))^{\frac{x}{\sin(x)^2}}, n = 2 ;$

$f_2 : x \mapsto e^{\cos(x)} \left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right), n = 5 ;$

$f_3 : x \mapsto \arctan(e^x), n = 3 ;$

$f_4 : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}, n = 4 ;$

$f_5 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)^2), n = 6 ;$

$f_6 : x \mapsto \frac{\ln(1 + e^x) - \ln(2)}{x \cos(x) \sqrt{1 - \sin(x)}}, n = 2.$

Exercice 22.8 (★★★ - Développement limité de la fonction tangente)

1. Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
2. Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant $\tan(\arctan(x)) = x$.
3. Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant $(\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^2$.

Exercice 22.9 (★★★)Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.**Exercice 22.10 (★★)**Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque impaire et de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Donner le $DL_6(0)$ de f^{-1} . On rappelle que $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Applications des développements limités**Exercice 22.11 (★★★)**

Calculer les limites suivantes :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} ;$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} ;$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2} ;$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^2}} ;$

(v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} ;$

(vi) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}$ (où $a > 0$).

Exercice 22.12 (★★★)

Déterminer des équivalents des suites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} ; \\ \bullet v_n = \frac{n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{e^{1/n^2} - 1} - 1 ; \end{array} \right| \bullet w_n = \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \quad (a, b > 0).$$

Exercice 22.13 (★★)

Montrer que $f : x \in]0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 22.14 (★★ - Dérivation des développements limités)

1. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(a) Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

(b) La fonction dérivée de f admet-elle un développement limité en 0 ?

2. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle contenant 0. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' est obtenue en dérivant la partie régulière du $DL_{n+1}(0)$ de f .

Exercice 22.15 (★★ - Développement limité d'une solution d'une équation différentielle)

Après avoir justifié qu'il existe une unique fonction $y :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de $2(1+x)y' - y = e^x$ et qui s'annule en 0, déterminer le $DL_4(0)$ de cette fonction.

Exercice 22.16 (★★★)

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

2. En exprimant le même développement limité d'une autre manière, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cardinal de l'ensemble $\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid k + 2\ell = n\}$.

Exercice 22.17 (★★★)

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+t}$. On notera $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ sa partie régulière.

2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 + X^4Q(X)$.

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déterminer une racine carrée de $I_n + N$, c'est-à-dire une matrice dont le carré est $I_n + N$.

Exercice 22.18 (★★★)

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ème en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$.

Exercice 22.19 (★★)

Déterminer pour les fonctions suivantes l'équation de la tangente en a et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente :

$$f_1 : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2) \text{ en } \left. \begin{array}{l} a = 0 ; \end{array} \right| \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}(e^{\sin x} - 1) \text{ en } \left. \begin{array}{l} a = 0 ; \end{array} \right| \quad f_3 : x \mapsto \sqrt{\tan x} \text{ en } a = \frac{\pi}{4}.$$

Développements asymptotiques

Exercice 22.20 (★★)

Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à \mathcal{C}_f .

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}e^{1/x} ; \quad \left| \quad f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \arctan(x).$$

Exercice 22.21 (★★)

Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$ à la précision $x^2 \ln^2(x)$.

Exercice 22.22 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ que l'on notera x_n . On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
 2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
 3. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
 4. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$.
 5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
-

Exercice 22.23 (★★★★)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n.$$

1. Montrer que cette équation possède une unique solution x_n .
 2. Déterminer la limite puis un équivalent simple de la suite (x_n) .
 3. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n) .
-

Exercice 22.24 (★★★★)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
