TD21

Polynômes

Premiers calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 21.1 (★★ - Valuation d'un polynôme - ✍)

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\operatorname{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n,\ a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer la valuation des polynômes $X^2 + 1$, $X^4 + 3X$, X^n.
2. Montrer que :

   (i) si $P \neq 0$, $\operatorname{val}(P) \leq \deg(P)$;

   (ii) $\operatorname{val}(\lambda \cdot P) = \operatorname{val}(P)$ pour tout $\lambda \neq 0$;

   (iii) $\operatorname{val}(P + Q) \geq \min\{\operatorname{val}(P), \operatorname{val}(Q)\}$;

   (iv) $\operatorname{val}(PQ) = \operatorname{val}(P) + \operatorname{val}(Q)$.

Exercice 21.2 (★★ - Équations polynomiales)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

(i) $P'(X)^2 = 4P(X)$;

(ii) $P \circ P = P$;

(iii) $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 21.3 (★★ - Formule de Vandermonde)

Soient $m, n, r \in \mathbb{N}$. En développant de deux manières le produit $(1 + X)^m(1 + X)^n$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 21.4 (★)

Dans les deux cas suivants, calculer $A \wedge B$ et déterminer des polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.

(i) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.

(ii) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 2X + 2$.

Exercice 21.5 (★★)

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne :

(i) de $X^n(X + 1)^2$ par $(X - 1)(X - 2)$;

(ii) de $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 21.6 (★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21.7 (★★)
Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$. En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

Exercice 21.8 (★★)
Montrer que pour $n, p \in \mathbb{N}^*$: $\quad (X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1.$

Exercice 21.9 (★★ - Deux questions indépendantes)
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $A \wedge B = 1$ si, et seulement si, $(AB) \wedge (A + B) = 1$.
2. Montrer que $A^2 \mid B^2$ si, et seulement si, $A \mid B$.

Exercice 21.10 (★★)
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j)$.

Montrer que les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Sont-ils premiers entre eux deux à deux ?

Exercice 21.11 (★★★)
Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que si A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, alors A divise B dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que le PGCD de A et B dans $\mathbb{C}[X]$ est égal au PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?

Racines

Exercice 21.12 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $X(X+1)(2X+1)$ divise $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.
2. Montrer que $(X-1)^3$ divise $B = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
3. Déterminer a et b pour que $C = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette la racine double 1. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$?

Exercice 21.13 (★★)
Soient $n \geq 2$ et $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} ... + \dfrac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $P - P'$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 21.14 (★★)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Prouver que toute racine rationnelle de P est dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt[k]{d}$ est soit entier, soit irrationnel.

Exercice 21.15 (★★)
Montrer que les seuls polynômes périodiques $P \in \mathbb{C}[X]$ (c'est-à-dire tels que il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X + k) = P(X)$) sont les polynômes constants.

Exercice 21.16 (★★)
La fonction $z \mapsto \overline{z}$ est-elle polynomiale ?

Exercice 21.17 (★★★)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Supposons P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer alors $P \wedge P'$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicité.

Exercice 21.18 (★★)
1. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que l'application $x \in \mathbb{C} \mapsto P(x) \in \mathbb{C}$ est surjective ? injective ?
2. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$?

Exercice 21.19 (★★★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
3. Montrer que L_n admet n racines réelles distinctes appartenant à $]-1, 1[$.

Exercice 21.20 (★★★)
Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 21.21 (★★★★ - D'après Centrale-Supélec)
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

1. Montrer que si P est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

Exercice 21.22 (★★★★)
Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^m - 1)(X^n - 1)$ divise $(X^{mn} - 1)(X - 1)$.
Ce résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont pas premiers entre eux ?

Factorisation

Exercice 21.23 (★)
Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13$.

1. Montrer que $-i$ est une racine de P. Préciser son ordre de multiplicité.

2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21.24 (★★)
Montrer que $P = X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$ possède j comme racine double. En déduire sa factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 21.25 (★★★)
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21.26 (★★★)
Soit n un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p+1}$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 21.27 (★★★ - Polynômes de Tchebytchev - ✍)
On étudie pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer que si T_n existe, alors il est unique.

2. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n existe et vérifie la relation $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

4. Déterminer la parité de T_n, son degré ainsi que son coefficient dominant.
5. Déterminer l'ensemble des racines de T_n, et en déduire sa décomposition en produits d'irréductibles.
6. En déduire que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2 T_n(x).$$

Exercice 21.28 (★★★)
Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\mathscr{S}_1 \begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-3 \\ xyz=-2 \end{cases} ; \qquad \mathscr{S}_2 \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}.$$

Exercice 21.29 (★★★)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 0$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note s_k la somme des racines (comptées avec multiplicité) de $P^{(k)}$.
Montrer que $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ est une progression arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 21.30 (★★★★)
Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\prod_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} \left(\zeta^k - \zeta^\ell\right)$.

Polynômes de Lagrange

Exercice 21.31 (★★)
Soient $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

Exercice 21.32 (★★★)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 21.33 (★★★★)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Fractions rationnelles

Exercice 21.34 (★★)
Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{X^3}{X^2 - 3X + 2} \text{ dans } \mathbb{R}[X] \ ;$$

$$F_2 = \frac{X^3 + X^2 + 1}{X^3 + X^2 + X} \text{ dans } \mathbb{C}[X] \ ;$$

$$F_3 = \frac{X}{X^3 - 1} \text{ dans } \mathbb{R}[X] \ ;$$

$$F_4 = \frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+2)} \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

Exercice 21.35 (★★ - Un air de déjà vu - ✍)

1. Soit $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$ un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X - \alpha_i}.$$

2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 21.36 (★★)

Montrer que $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_7} \frac{1}{2 - \omega} = \frac{448}{127}$.

Exercice 21.37 (★★★)

Soit $n \geq 2$. Donner la forme irréductible de la fraction $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega}$.

Exercice 21.38 (★★★ - Dérivée d'une fraction rationnelle)

1. Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de R.

   On appelle *dérivée de* R, et on note R' la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$.

2. Montrer que pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$, $(R + S)' = R' + S'$, $(RS)' = R' + S'$ et si S est non nulle, $\left(\dfrac{R}{S}\right)' = \dfrac{R'S - RS'}{S^2}$.

3. Étudier le degré de F' en fonction de celui de F.

4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction F de $\mathbb{K}(X)$ vérifiant $F' = 1/X$.
