TD20

Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des suites

Exercice 20.1 (★)
Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - o\left(e^{-n}\right) - \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

2. $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

3. $w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + n^2 + o(n\sqrt{n}) + n\ln(n)\sqrt{n} + o\left(n^2\ln(\ln n)\right)$.

Exercice 20.2 (★★)
Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) est bornée.

2. Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge.

3. Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge vers 0 .

4. Si (u_n) est bornée et si $v_n = o(u_n)$, alors (v_n) converge.

5. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n = o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n = o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n = o\left(\frac{n^4}{2}\right)$

6. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} = o(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

7. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

8. Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) des suites telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

   ☐ si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ ☐ si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

9. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$

   ☐ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

Exercice 20.3 (★★)
Trouver un équivalent simple des suites :

$$a_n = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}, \qquad c_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right)-1, \qquad d_n = \sqrt[3]{n^3-n}-n,$$

$$e_n = \frac{(1-\ln(n))(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}}, \qquad f_n = \frac{\exp\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)-e}{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(n+1+\frac{1}{n}\right)}, \qquad g_n = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}}, \qquad h_n = n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{5}),$$

$$i_n = (n+1)^n, \qquad j_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}, \qquad k_n = (n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}, \qquad l_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}-1, \qquad m_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{2^n}\right)\right).$$

Exercice 20.4 (★★)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 20.5 (★★)

Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$.

Exercice 20.6 (★★★)

Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 20.7 (★★★)

Soient (u_n), (v_n), (w_n), (t_n) des suites de réels strictement positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$.

1. Montrer que $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
2. Ce résultat est-il encore valable si on ne suppose plus les suites (u_n), (v_n), (w_n), (t_n) à termes strictement positifs ?

Exercice 20.8 (★★★)

Montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 20.9 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3n^2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+2+\ln(n)}}, \qquad b_n = \frac{n\sin(n)}{1+n^2}, \qquad c_n = \sqrt[n]{n},$$

$$d_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}, \qquad e_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}, \qquad f_n = n\sqrt{\ln\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right)},$$

$$g_n = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(n))}{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(2n))}, \qquad h_n = n\left(e^{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}-e^{\frac{\pi}{2}}\right), \qquad i_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Exercice 20.10 (★★)
Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}$.

Exercice 20.11 (★★★)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.

Exercice 20.12 (★★★ - Développement asymptotique d'une suite implicite)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 20.13 (★★★★ - Étude d'une suite implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + \ln(x) = 0$ possède une unique solution $x_n > 0$.
2. Déterminer la limite de x_n.
3. On pose $u_n = 1 - x_n$. Justifier que $nu_n \sim -\ln(u_n)$, puis déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 20.14 (★★★★★ - Oral Polytechnique)
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer un équivalent de (u_n).
On rappelle pour cela que si une suite $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (théorème de Cesàro).

Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 20.15 (★★)
Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

(i) $\dfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$ en 0 ;

(ii) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$;

(iii) $\ln(\cos(x))$ en 0 ;

(iv) $\ln(\sin(x))$ en 0 ;

(v) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en 0 ;

(vi) $x^2\ln(1+x) + x\cos(x)$ en $+\infty$;

(vii) $(x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)$ en $+\infty$;

(viii) $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$ en 1 ;

(ix) $\dfrac{xe^x - x^2}{\mathrm{ch}(x)}$ en $+\infty$;

(x) $\dfrac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$ en 0 ;

(xi) $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$ en 0 ;

(xii) $\cos(ax) - \cos(bx)$ en 0.

Exercice 20.16 (★★)
Calculer les limites suivantes :

(i) $\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(1+\ln(1+x))$;

(ii) $\lim_{x\to 0} (1+\tan(x))^{1/\sin(x)}$;

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x)}{x^x - 1}$;

(iv) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$;

(v) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln((\sin(x))^2)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$;

(vi) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\tan(2x)$;

(vii) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$;

(viii) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1}$;

(ix) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x) - \sqrt{1+x}+1}{\cos(x) - e^x}$;

(x) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 20.17 (★★)
Soit $f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$.

1. Prouver que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\left(e^{f(x)} - 1\right)\ln(x)$.
3. Soit $g(x) = \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1\right]\ln(x)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 20.18 (★★★ - Composition à gauche d'un équivalent par le logarithme)
Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs réelles, et $a \in I$. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et que f et g sont strictement positives au voisinage de a.

1. On suppose $\ell \neq 1$. Montrer que $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.
2. Ce résultat subsiste-t-il si $\ell = 1$?
