

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 17.1 (★)

Montrer que si A, B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A + B$ et AB sont encore nilpotentes. Est-ce encore vrai si on ne suppose plus que A et B commutent ?

Exercice 17.2 (★★ - Matrices stochastiques)

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1 - \lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.

3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.

(b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.

Exercice 17.3 (★★★ - Produit de matrices élémentaires -)

Soient $1 \leq i, j, k, \ell \leq n$. Montrer l'égalité suivante dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,\ell}.$$

Exercice 17.4 (★★★ - Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ -)

On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$\mathcal{Z}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à \mathcal{Z}_n .
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à \mathcal{Z}_2 ?
3. On souhaite déterminer l'ensemble \mathcal{Z}_n . Considérons pour cela une matrice M appartenant à \mathcal{Z}_n .
 - (a) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
 - (b) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
 - (c) Conclure.

Exercice 17.5 (★★★ - Nilpotence des matrices triangulaires strictes -)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur à n .

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathcal{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$

- (a) Identifier $\mathcal{T}_0^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_1^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$
- (b) Soient $k, \ell \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbb{K})$, alors $A \times B \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbb{K})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur à n .

Trace, transposée

Exercice 17.6 (★)

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est symétrique si, et seulement si, $AB = BA$.

Exercice 17.7 (★★)

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 17.8 (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(A^\top A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0_n$.

Exercice 17.9 (★★★)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 17.10 (★★★★ - Oral Mines 2023)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0_n$. Montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$\text{tr}((A + B)^k) = \text{tr}(A^k) + \text{tr}(B^k).$$

Matrices inversibles, algorithme du pivot de Gauss

Exercice 17.11 (★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice R échelonnée par lignes et une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, telle que $EA = R$.

Exercice 17.12 (★★)

Calculer l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Exercice 17.13 (★★★)

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles en discutant suivant la valeur du paramètre réel α , calculer leur inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) \\ \text{sh}(\alpha) & \text{ch}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.14 (★★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante -)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Exercice 17.15 (★★★★)

Déterminer l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont la définition a été donnée à l'Exercice 17.2), inversibles et dont l'inverse est également stochastique.

Puissances et polynômes d'une matrice

Exercice 17.16 (★)

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17.17 (★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A .
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A .

Exercice 17.18 (★★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**

- (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A .
- (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
- (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_p et β_p . En déduire α_p et β_p en fonction de p .
- (d) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**

- (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- (b) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.19 (★★)

Soient $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites réelles définies par $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}.$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, x_0, y_0 et z_0 .

Exercice 17.20 (★★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17.21 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale)

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ ($r \leq n$) des scalaires distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$m_1 + \dots + m_r = n$$

On pose $D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour toute fonction polynomiale P :

$$P(D) = \text{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D .
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $Q^{-1}AQ = D$. Déterminer un polynôme annulateur de A .
4. À l'aide de l'Exercice 17.20, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 17.22 (★★★★)

Soient $n \geq 2$ et N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que N est nilpotente.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui commute avec N . Montrer que M est inversible si, et seulement si, $M + N$ est inversible.