

Limite et continuité

Limites de fonctions

Exercice 16.1 (★★)

Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

- | | |
|---|--|
| <p>(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x$;</p> <p>(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{2x+7} - 3}$;</p> <p>(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$;</p> <p>(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2)$;</p> <p>(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$;</p> <p>(vi) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$;</p> | <p>(vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$;</p> <p>(viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;</p> <p>(ix) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$;</p> <p>(x) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{3}}$;</p> <p>(xi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})$.</p> |
|---|--|

Exercice 16.2 (★★)

Déterminer les limites suivantes si elles existent, et justifier qu'elles n'existent pas dans le cas contraire :

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$; (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$; (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \lfloor x \rfloor$; (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$;

Exercice 16.3 (★★)

Étudier la limite (éventuellement les limites à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :

- (i) $\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$ en a ; (ii) $\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$ en 1 ; (iii) $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.

Exercice 16.4 (★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$. Montrer alors que pour tout $b > 0$, $\frac{f(bx)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 16.5 (★★★★)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 16.6 (★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} f(x) = 0$; | • $x \mapsto e^{bx} f(x)$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

1. Justifier l'existence de $\lambda = \sup \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{cx} f(x) = 0 \right\}$.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\lambda - \varepsilon)x} f(x) = 0$.

3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto e^{(\lambda + \varepsilon)x} f(x)$ n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$.

Continuité

Exercice 16.7 (★★)

Les fonctions suivantes sont-elles continues ou prolongeables par continuité sur \mathbb{R} ?

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad g(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor; \quad h(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}; \quad i(x) = \sin(1+x) \ln(|1+x|).$$

Exercice 16.8 (★★)

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

$$(i) \ x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right); \quad | \quad (ii) \ x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x}\right); \quad | \quad (iii) \ x \mapsto e^{-1/x}; \quad | \quad (iv) \ x \mapsto (1+x)^{1/x}.$$

Exercice 16.9 (★★★★)

Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de \mathbb{R} .

Exercice 16.10 (★★★★)

1. Montrer que si f et g sont continues sur \mathbb{R} et coïncident sur \mathbb{Q} , alors $f = g$ sur \mathbb{R} .
 2. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$.
 - (a) Montrer que $f \leq g$.
 - (b) Montrer qu'on n'a pas nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.
 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue dont la restriction à \mathbb{Q} est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.
-

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 16.11 (★)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I vérifiant : $\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)|$ et $f(x) \neq 0$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Que dire si les fonctions ne sont pas continues ?

Exercice 16.12 (★)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 16.13 (★★)

1. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout y strictement compris entre ℓ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.
 2. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$. Montrer que pour tout $y \leq f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = y$.
-

Exercice 16.14 (★★)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 16.15 (★★★)

Un randonneur parcourt 20km en 5h.

1. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a fait exactement 4km.
 2. Il prétend que, sur n'importe quel intervalle de deux heures, il a parcouru 10km. Est-ce possible ?
-

Exercice 16.16 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur \mathbb{R} .

Montrer que f admet une unique point fixe. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose f croissante ?

Exercice 16.17 (★★)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
 2. Même question lorsqu'on suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.
-

Exercice 16.18 (★★★)

Soit $k \geq 0$. Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. On suppose que $k = 1$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un intervalle de \mathbb{R} .
 2. On suppose que $k \in [0, 1[$. Montrer que f admet un unique point fixe.
-

Exercice 16.19 (★★★)

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et injective. On se propose de montrer que f est strictement monotone.

1. **Première méthode :** On considère $a, b, x, y \in I$ avec $a < b$ et $x < y$. On pose pour $t \in [0, 1]$, $u(t) = tx + (1 - t)a$ et $v(t) = ty + (1 - t)b$. On pose $G(t) = f(u(t)) - f(v(t))$.
 - (a) Calculer $u(0), u(1), v(0), v(1)$. Tracer u et v .
 - (b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $u(t) < v(t)$.
 - (c) En déduire que G ne s'annule pas sur $[0, 1]$, puis que $G(0)$ et $G(1)$ ont le même signe.
 - (d) En déduire que f est monotone sur I .
 2. **Deuxième méthode :** On suppose que f n'est pas monotone.
 - (a) Expliquer pourquoi on peut supposer qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$. Faire un dessin.
 - (b) Conclure.
-

Exercice 16.20 (★★★)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\forall x \in [0, 1], f \circ f(x) = x$.

1. Montrer que f est injective. En déduire qu'elle est strictement croissante.
 2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) = x$.
On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $f(x) < x$ ou $f(x) > x$.
-

Exercice 16.21 (★★)

Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} .

1. Montrer que f ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.
2. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors f est constante.
3. On suppose f continue. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} et atteint ses bornes.

Exercice 16.22 (★★)

On considère, pour une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, les deux propositions :

$$A : \ll \forall x \in I, f(x) > 0 \gg \quad \text{et} \quad B : \ll \exists \alpha > 0, \forall x \in I, f(x) \geq \alpha \gg.$$

Étudier si $A \Rightarrow B$ dans chacun des cas suivants :

- | | |
|--|--|
| (i) $I = [0, 1]$ et f continue sur I ; | (iii) $I =]0, 1[$ et f continue sur I ; |
| (ii) $I = \mathbb{R}$ et f continue sur \mathbb{R} ; | (iv) $I = [0, 1]$. |

Exercice 16.23 (★★)

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)$.

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1], f(x) + m \leq g(x)$.

Exercice 16.24 (★★)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur \mathbb{R} et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} .

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur \mathbb{R} .

Exercice 16.25 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Supposons que $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$ existent et sont finies.
Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} . La fonction f atteint-elle ses bornes ?
2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$, montrer que f admet un minimum absolu.

Équations fonctionnelles

Exercice 16.26 (★★)

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues sur \mathbb{R} vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.
2. En déduire que : $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$.
3. Conclure en utilisant la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Exercice 16.27 (★★★)

Déterminer toutes les fonctions continues sur \mathbb{R} vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

- | | |
|---|--|
| (i) $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$; | (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$. |
| (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$; | (iv) (★) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$. |

