

Pour obtenir une telle configuration :

- on choisit p lignes de l'échiquier parmi n , ce qui représente $\binom{n}{p}$ possibilités ;
- **puis** pour chaque ligne, on choisit l'emplacement de la tour sur cette ligne. Plus précisément pour la première ligne (celle avec le plus petit numéro), on a n emplacements possibles. **Puis** $(n - 1)$ emplacements possibles pour la deuxième ligne et la deuxième tour, jusqu'à la ligne p pour laquelle on a $(n - p + 1)$ possibilités pour placer la tour p .

Par le principe des bergers, le nombre de telles configurations est donc :

$$\binom{n}{p} n(n-1) \dots (n-p+1) = \binom{n}{p} \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice 15.9 (★★)

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
 - (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 15.10 (★★ - Le poker)

Rappelons qu'un jeu de poker contient 32 cartes, c'est-à-dire 8 (du 7 à l'as) de chaque couleur. Une main est formée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

- (i) une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?
- (ii) une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?
- (iii) exactement trois trèfles ?
- (iv) exactement un as et deux cœurs ?

Exercice 15.11 (★)

Soient x_0, \dots, x_n des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

Exercice 15.12 (★★★)

On considère l'ensemble $\llbracket 1, 100 \rrbracket$ dont on fixe une sous-partie X de cardinal 10. Montrer qu'il existe deux sous-parties de X distinctes dont la somme des éléments est égale.

Exercice 15.13 (★★★★★ - Oral X)

Montrer qu'un ensemble E est infini si, et seulement si, pour toute application $f : E \rightarrow E$, il existe $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

Dénombrements ensemblistes

Exercice 15.14 (★★★ - Formule de Vandermonde)

Soient $(m, r, n) \in \mathbb{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Exercice 15.15 (★★★)

Soient $n \geq p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 15.16 (★★★ - Banque CCINP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un ensemble de cardinal n .

- Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
- Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 15.17 (★★★)

Soit E un ensemble de cardinal n . Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$.

Exercice 15.18 (★★★ - Dénombrement par construction d'une bijection)

Soit E un ensemble de cardinal n . On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathcal{C} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A, B) \in \mathcal{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur E par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \begin{matrix} \mathcal{C} & \longrightarrow & \{0, 1, 2\}^E \\ (A, B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{matrix}$ est bijective, et conclure.

Exercice 15.19 (★★★★)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

$$(i) \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X) \quad \Bigg| \quad (ii) \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y) \quad \Bigg| \quad (iii) \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cup Y).$$

Dénombrements d'applications

Exercice 15.20 (★★★★)

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n . On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de E dans F .

- Déterminer $S_{p,2}$, $S_{p,3}$, $S_{p,p}$.

2. On suppose $p > 1$, $n > 1$, et l'on introduit a un élément arbitraire de E . En étudiant la restriction d'une surjection de E dans F à $E \setminus \{a\}$, établir :

$$S_{p,n} = n(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}).$$

3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $p \geq 1$:

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

1. Remarquons que $S_{p,2} = 0$ si $p = 1$. Pour $p \geq 2$, il y a 2^p applications de E dans $F = \{y_1, y_2\}$. Parmi celles-ci, seules deux applications ne sont pas surjectives, les applications constantes $k \mapsto y_1$ et $k \mapsto y_2$.

Le nombre de surjections de E dans F est donc $S_{p,2} = 2^n - 2$.

De même, $S_{p,3} = 0$ si $p = 1$ ou 2 . Pour $p \geq 3$, il y a 3^p applications de E dans $F = \{y_1, y_2, y_3\}$. Parmi celles-ci, les applications non surjectives sont :

- les applications constantes : il y en a 3 ;
- les applications f dont l'image est $\{y_1, y_2\}$, $\{y_1, y_3\}$ ou $\{y_2, y_3\}$. Et dans chacun de ces cas, il y a $S_{p,2} = 2^n - 2$ telles applications.

Le nombre de surjections recherchées est donc :

$$S_{p,3} = 3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \times 2^n + 3.$$

Enfin lorsque $p = n$, le cardinal des ensembles de départ et d'arrivée étant égaux, une application est surjective si, et seulement si, elle est bijective. Et le nombre de bijections de E dans lui-même est $p!$. D'où $S_{p,p} = p!$.

2. Soit f une surjection de E dans F . Notons $b = f(a)$, et considérons $g = f|_{E \setminus \{a\}}$.

Puisque f est surjective, b admet au moins un antécédent par f . Deux cas sont possibles :

- soit b admet un unique antécédent par f , qui est alors a . Dans ce cas, g est une application surjective de $E \setminus \{a\}$ dans $F \setminus \{b\}$. Et réciproquement, une telle application g se prolonge en une surjection de E dans F en associant à a l'élément b de F .

Il y a dans ce cas n choix possibles pour choisir l'élément $f(a)$, et $S_{p-1,n-1}$ surjections g possibles de $E \setminus \{a\}$ dans $F \setminus \{f(a)\}$. Soit au total $nS_{p-1,n-1}$ surjections dont la restriction à $E \setminus \{a\}$ n'est pas surjective.

- soit b admet au moins deux antécédents par f . Dans ce cas, g est une application surjective de $E \setminus \{a\}$ dans F . Et réciproquement, pour une telle application g , elle se prolonge en une surjection de E dans F en associant à a n'importe quel élément de F .

Il y a dans ce cas $S_{p-1,n}$ surjections g possibles de $E \setminus \{a\}$ dans F , et n choix possibles pour l'image de a . Soit au total $nS_{p-1,n}$ surjections de ce type.

Ainsi, le nombre $S_{p,n}$ de surjections de E dans F est égal à :

$$S_{p,n} = nS_{p-1,n-1} + nS_{p-1,n} = n(S_{p-1,n-1} + S_{p-1,n}).$$

3. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$ ».

I Pour $p = 1$ et $n = 1$, $S_{1,1} = 1$ et on vérifie :

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = 0 + 1 = 1.$$

Si $n > 1$, $S_{1,n} = 0$ et on vérifie à l'aide de la formule du binôme que :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} n = n(-1+1)^{n-1} = 0.$$

H Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété au rang $p-1$. Pour $n = 1$, $S_{p,1} = 1$ et on vérifie que :

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^p = 0 + 1^p = 1.$$

Pour $n \geq 2$, on utilise l'identité de la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= n(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}) \\ &= n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{p-1} + n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} k^{p-1}. \end{aligned}$$

On ajoute un terme nul pour $k = n$ dans la deuxième somme puis on combine les deux sommes avant d'employer la formule du triangle de Pascal puis la formule du capitaine :

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right) k^{p-1} = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} k^{p-1} \\ &= \underbrace{0}_{k=0} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p. \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang p .

On conclut par principe de récurrence.

Exercice 15.21 (★★★)

- Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
- (a) Soit $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ croissante. Montrer que l'application $g : k \mapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$.
(b) Soit $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
(c) En déduire le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- Notons tout d'abord qu'une application strictement croissante est injective. Par conséquent, si $p > n$, il n'y a pas de telle application.

Supposons $p \leq n$. Une application $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ strictement croissante est totalement déterminée par son image. En effet, si $\text{Im}(g) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \dots < y_p$, alors nécessairement $g(i) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$ par stricte croissance.

Ainsi, les applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont en bijection avec les

p -combinaisons de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il y en a donc $\binom{n}{p}$.

2. (a) L'application g est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$ puisque pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$1 \leq f(1) \leq f(k) + k - 1 \leq f(p) + p - 1 \leq n + p - 1.$$

Montrons qu'elle est strictement croissante. Soit pour cela $1 \leq k < \ell \leq p$. Par croissance de f :

$$g(k) = f(k) + k - 1 \leq f(\ell) + k - 1 < f(\ell) + \ell - 1 = g(\ell).$$

Donc g est strictement croissante.

- (b) Inversement, prenons $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$ strictement croissante. Montrons que $f : k \mapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soient $k, \ell \in \llbracket 1, p \rrbracket$ avec $k \leq \ell$. Puisque g est strictement croissante :

$$g(\ell) - g(k) = \sum_{i=k+1}^{\ell} \underbrace{g(i) - g(i-1)}_{\geq 1} \geq \ell - k.$$

D'où :

$$f(\ell) - f(k) \geq g(\ell) - g(k) - (\ell - k) \geq 0.$$

Donc l'application f est croissante. Comme de plus $f(1) = g(1) \geq 1$ et $f(p) = g(p) - p + 1 \leq n + p - 1 - p + 1 = n$, f est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- (c) Les questions précédentes établissent une correspondance bijective entre les applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et les applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$. Par la question 1, le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est donc $\binom{n + p - 1}{p}$.

Exercice 15.22 (★★★★ - Formule du crible)

1. Prouver par récurrence sur $n \geq 2$ la formule du crible : si A_1, \dots, A_n sont n parties finies d'un ensemble E , alors

$$\begin{aligned} \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{Card}(I)-1} \text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right). \end{aligned}$$

2. **Application.** On note D_n l'ensemble des dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire les éléments de \mathfrak{S}_n sans points fixes. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible, prouver que :

$$\text{Card}(D_n) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « si A_1, \dots, A_n sont n parties finies d'un ensemble E , alors

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \text{ »}$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

I Pour $n = 2$, il s'agit de la formule du cours :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

H Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Soient A_1, \dots, A_{n+1} des parties finies de E . Alors :

$$\begin{aligned} & \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) \\ &= \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) + \text{Card}(A_{n+1}) - \text{Card}((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \quad (\text{cas } n = 2) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \text{Card}((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})) \quad (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1}) \quad (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^\ell \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell-1} \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell-1} \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \end{aligned}$$

À $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé dans la première somme figure toutes les intersections de k ensembles parmi A_1, \dots, A_n (sans A_{n+1}). Et à $\ell \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ fixé dans la seconde somme figure toutes les intersections de $\ell-1$ ensembles parmi A_1, \dots, A_n , avec A_{n+1} . En regroupant ces deux sommes, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, toutes les intersections de k ensembles parmi A_1, \dots, A_{n+1} , ce qui donne :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, nous avons donc démontré la formule du crible.

2. Dans le cas qui nous intéresse, remarquons que $D_n = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$. Or, avec la formule du crible :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'intersection de k ensembles parmi A_1, \dots, A_n est formée par les permutations qui fixent k points donnés de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Elles sont au même nombre que les permutations des $n - k$ nombres restants, c'est-à-dire $(n - k)!$. On remarque de plus que la somme intérieure, à k fixé, contient $\binom{n}{k}$ termes. D'où :

$$\text{Card}(\overline{D}_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

et finalement :

$$\text{Card}(D_n) = \text{Card}(\mathfrak{S}(E)) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$
