TD10

Équations différentielles linéaires

Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 10.1 (★★)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués :

(E_1) : $y' - 2xy = xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$;

(E_2) : $y' + 2iy = e^{ix}$, $I = \mathbb{R}$;

(E_3) : $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$, $I = \mathbb{R}$;

(E_4) : $y' - y\tan(x) = \cos^2(x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

(E_5) : $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = 1$, $I = \mathbb{R}$;

(E_6) : $y' + y = x\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$;

(E_7) : $\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$, $I =]0, +\infty[$;

(E_8) : $\begin{cases} (x+1)y' + (x^2+x+1)y = x \\ y(1) = e \end{cases}$, $I =]-1, +\infty[$.

Exercice 10.2 (★★★ - Raccordement de solutions)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

(E_1) : $xy' + y = \dfrac{2x}{x^2+1}$;

(E_2) : $xy' - 2y - x^4 = 0$;

(E_3) : $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$;

(E_4) : $(x^2 - x)y' + (2x-1)y = 1$.

Exercice 10.3 (★★★ - Oral Mines PSI)

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'\sin(x) + y\cos(x) = \sin(x)^2$?

Exercice 10.4 (★★★ - Changement de fonction inconnue)

Résoudre l'équation différentielle (non linéaire du premier ordre) $y' = e^{x+y}$ en posant $z = e^{-y}$.

Exercice 10.5 (★★★)

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1$.

   On pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)f(-x)$.

2. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + f(t) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10.6 (★★★★)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. On étudie l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' + ay = \varphi(t).$$

1. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que y est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.

2. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique.

Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 10.7 (★★)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$;

(E_2) : $y'' - y' + (1+i)y = 0$;

(E_3) : $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

(E_4) : $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}(x)$;

(E_5) : $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$;

(E_6) : $y'' - y = e^x \cos(2x)$;

(E_7) : $y'' + 2y' = x^2 + xe^{-2x}$;

(E_8) : $y'' + y' + y = \cos^3(x)$;

(E_9) : $\begin{cases} y'' - y' - 2y = x^2 - x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 10.8 (★★)

Soit x et y des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Résoudre les système différentiels suivants :

$$(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_2) : \begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_3) : \begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2ty + t\sin(t) \end{cases}$$

On pourra poser $u = x + y$ et $v = x - y$ pour $(\mathscr{S}_1)$, trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par x pour $(\mathscr{S}_2)$, et poser $u = x + iy$ pour $(\mathscr{S}_3)$.

Exercice 10.9 (★★★ - Équation différentielle d'Euler)

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'*équation différentielle d'Euler* :

$$(E) : at^2y'' + bty' + cy = f(t)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ et f est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Posons $z(x) = y(e^x)$. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.

2. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y'' + ty' + y = \cos(2\ln(t))$ pour $t > 0$.

Exercice 10.10 (★★★)

Résoudre l'équation suivante sur $]-1, 1[$:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

On pourra poser $x = \sin(t)$.

Exercice 10.11 (★★)

On considère sur $I =]-1, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x.$$

1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I et z définie par $y(x) = z(x)e^x$.

   Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle (E_1) que l'on résoudra.
3. Donner les solutions de (E).

Exercice 10.12 (★★★)

On considère une solution y de l'équation différentielle $ty'' - 2y' - ty = 0$ sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que y est indéfiniment dérivable pour tout $t > 0$.
2. En dérivant cette équation, montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants.
3. En raisonnant comme pour les équation du second ordre à coefficients constants, résoudre cette équation et en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 10.13 (★★★★ - Exemple d'un problème aux limites)

On considère une fonction indéfiniment dérivable $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et l'équation $y'' + y = f(x)$. On cherche les solutions y sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$, et on pose à cet effet :

$$F(x) = -\cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x) \int_{\pi/2}^x f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Préciser les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$.
2. On envisage ici les deux cas particulier $f : x \mapsto 1$ et $f : x \mapsto x$.

   Exprimer dans ces deux cas $F(x)$ sans symbole intégral, puis $F''(x) + F(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   En déduire dans ces deux cas les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$
3. On revient au cas général. Montrer que F est deux fois dérivable, expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$.

   En déduire les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

Exercice 10.14 (★★★★)

Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 10.15 (★★★★)

Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire.
Montrer que pour chaque $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire solution de l'équation différentielle $y'' + ay = f(x)$ et vérifiant $y(0) = y_0$.
