DS8

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Développement asymptotique d'une suite implicite)

1. Puisque $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $y_n \neq 1$. Et alors, pour tout $n \geq N$:
$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = \frac{\ln(y_n) + \ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)}.$$
Puisque $\lim \frac{\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)}{\ln(y_n)} = 0$, on obtient $\lim \frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = 1$, et donc $\boxed{\ln(x_n) \sim \ln(y_n).}$

2. (a) Considérons la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x + e^x$. g est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + e^x > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Puisque g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{\pm\infty} g = \pm\infty$). Tout entier $n \in \mathbb{N}$ a donc un unique antécédent x_n par g.

   Ainsi, l'équation $\boxed{(E_n) \text{ possède une unique solution } x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$g(x_n) = n < n + 1 = g(x_{n+1}).$$
   Puisque g est strictement croissante, on obtient $x_n < x_{n+1}$.

   La suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc (strictement) croissante.}}$

   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, par le théorème de limite monotone, soit elle converge vers une limite finie, soit elle diverge vers $+\infty$.

   Supposons que (x_n) converge vers une limite finie ℓ. Alors en passant à la limite dans $g(x_n) = n$, on obtient que $\lim g(x_n) = +\infty$. Mais puisque g est continue en $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim g(x_n) = g(\ell)$ qui est finie. D'où une contradiction.

   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

   Puisque de plus $x \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$, on obtient $\boxed{x_n = o(e^{x_n}).}$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $e^{x_n} - n = -x_n = o(e^{x_n})$, et donc $\boxed{e^{x_n} \sim n.}$

   En utilisant la question préliminaire, on peut prendre le logarithme dans ces équivalents (en notant bien que les hypothèses requises sont satisfaites ici), ce qui donne $\boxed{x_n \sim \ln(n).}$

3. (a) Puisque $x_n \sim \ln(n)$, alors $y_n = x_n - \ln(n) = o(\ln(n))$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Remplaçons dans l'égalité (E_n) :
$$e^{y_n} = e^{x_n - \ln(n)} = \frac{e^{x_n}}{n} = \frac{n - x_n}{n} = \frac{n - \ln(n) + o(\ln(n))}{n} \boxed{= 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

   (b) Par les croissances comparées, $\lim \frac{\ln(n)}{n} = 0$. On déduit alors de la question précédente que $\lim e^{y_n} = 1$, soit encore $\boxed{\lim y_n = 0.}$ Comme enfin $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient $\boxed{e^{y_n} - 1 \sim y_n.}$

   (c) D'après les questions précédentes :
$$e^{y_n} - 1 \sim y_n \quad \text{ et par la question 3.(a) } \quad e^{y_n} - 1 \sim -\frac{\ln(n)}{n}.$$

Ainsi, $y_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, ce qui se récrit $y_n = -\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. Finalement :

$$\boxed{x_n = \ln(n) + y_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).}$$

Exercice 2

Partie I. Cas d'une série géométrique

1. Puisque $q \in]-1,1[$, la série géométrique $\sum u_n = \sum q^n$ converge, et donc $\boxed{\text{converge à l'ordre 1.}}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\frac{1}{1-q}.}$$

2. La série de terme général $R_{1,n} = \dfrac{q}{1-q}q^n$ est (à une constante près) géométrique de raison $q \in]-1,1[$. Elle converge donc. Par conséquent, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge à l'ordre 2}}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = \frac{q}{1-q}\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 q^n.}$$

3. Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(p)$: « $\sum u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{p,n} = \left(\dfrac{q}{1-q}\right)^p q^n$ » pour tout $p \geq 1$.

   $\boxed{\textbf{I}}$ Par la question 1, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   $\boxed{\textbf{H}}$ Soit $p \geq 1$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(p)$ vraie.

   La série de terme général $R_{p,n} = \left(\dfrac{q}{1-q}\right)^p q^n$ converge car géométrique de raison $q \in]-1,1[$. Donc $\sum u_n$ converge à l'ordre $p+1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = \left(\frac{q}{1-q}\right)^p \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \left(\frac{q}{1-q}\right)^{p+1} q^n.$$

   D'où la propriété au rang $p+1$.

   Par principe de récurrence, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ pour tout } p \geq 1.}$

Partie II. Cas d'une série de Riemann

4. $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série de Riemann d'exposant α. $\boxed{\text{Elle converge (à l'ordre 1) si, et seulement si, } \alpha > 1.}$

5. (a) Considérons la fonction $f : t \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [k,k+1]$:
$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq f(t) \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par croissante de l'intégrale :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Soient n, N des entiers tels que $1 \leq n \leq N$. Sommons les inégalités précédentes pour $k = n, \ldots, N$:

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha},$$

qui se récrit :

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right] \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Passons à la limite dans ces inégalités lorsque $N \to +\infty$, en notant bien que tous les termes y intervenant convergent bien puisque $\alpha > 1$:

$$R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = R_{1,n} + \frac{1}{n^\alpha}.$$

On en déduit l'encadrement suivant, valable pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

et donc :

$$1 - \frac{\alpha-1}{n} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_{1,n} \leq 1.$$

Puisque $1 - \dfrac{\alpha-1}{n} \to 1$, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_{1,n}$ existe et vaut 1. En d'autres termes :

$$\boxed{R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

(b) La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ étant une série de Riemann, elle converge si, et seulement si, $\alpha - 1 > 1$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum R_{1,n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si, et seulement si, } \alpha > 2.}$

6. (a) Puisque $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ ne s'annulent pas, $a_n \sim b_n$ si, et seulement si, $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, ce qui se récrit en termes quantifiés :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Soit puisque $|b_n| > 0$:

$$|a_n - b_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

C'est d'ailleurs la définition quantifiée de $a_n \sim b_n$ prise dans le cours.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Par les hypothèses et la question précédente, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq n_0, \quad |a_k - b_k| \leq \varepsilon b_k.$$

Soient $n \geq n_0$ et $N > n$. Sommons ces inégalités pour $k = n+1, \ldots, N$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} |a_k - b_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{N} b_k.$$

D'autre part, par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{N} a_k - \sum_{k=n+1}^{N} b_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{N} (a_k - b_k) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |a_k - b_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{N} b_k.$$

En passant à la limite dans ces inégalités lorsque $N \to +\infty$, en notant bien ici que tous les termes en jeu convergent par hypothèse :

$$\left| R_n^a - R_n^b \right| \leq \varepsilon R_n^b.$$

Par la question précédente, $\boxed{R_n^a \underset{n \to +\infty}{\sim} R_n^b.}$

7. Montrons par récurrence sur $p \geq 2$ la propriété $\mathscr{P}(p)$: « $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'ordre p si, et seulement si, $\alpha > p$, et il existe alors $C_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $R_{p,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{C_p}{n^{\alpha - p}}$ ».

   $\boxed{\mathbf{I}}$ La propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie d'après les questions 4 et 5.

   $\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété vraie au rang p.

   Pour que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre $p+1$, il est nécessaire qu'elle converge à l'ordre p, et donc que $\alpha > p$ par hypothèse de récurrence.

   Supposons $\alpha > p$. Par hypothèse de récurrence, il existe $C_p \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$R_{p,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C_p}{n^{\alpha - p}}.$$

   La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha - p}}$ converge si, et seulement si, $\alpha - p > 1$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum R_{p,n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > p+1$. Autrement dit, $\sum u_n$ est d'ordre $p+1$ si, et seulement si, $\alpha > p+1$.

   Supposons $\alpha > p+1$. À l'aide de la question 6.(b) dont on notera que les hypothèses sont bien satisfaites (puisque $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha - p}}$ converge), on déduit l'équivalent :

$$R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{C_p}{n^{\alpha - p}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C_p}{\alpha - p - 1} \frac{1}{n^{\alpha - p - 1}},$$

   ce dernier équivalent se déduisant de la question 5.(a). D'où la propriété $\mathscr{P}(p+1)$ en posant $C_{p+1} = \dfrac{C_p}{\alpha - p - 1} > 0$.

   Par principe de récurrence, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'ordre $p \geq 2$ si, et seulement si, $\boxed{\alpha > p.}$

Partie III. Cas d'une série alternée

Dans cette partie, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. La suite $n \mapsto \dfrac{1}{n+1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge (à l'ordre 1).}}$

9. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$
Soit à présent $N \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n \,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
D'où l'égalité attendue puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$ $1+t \geq 1$ et $t^n \geq 0$, et donc :
$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq \frac{t^n}{1} = t^n.$$
Par croissance de l'intégrale :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$
Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 0}$ par le théorème des gendarmes.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 9.(a) :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient (puisque tout converge dans cette égalité) :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).}$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k &= \ln(2) - \left(\ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &\boxed{= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

10. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété $\mathscr{P}(p)$: « la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$ ».

$\boxed{\mathbf{I}}$ La question précédente nous assure que $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $p \geq 1$, on suppose que l'assertion $\mathscr{P}(p)$ est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_{p,k} &\overset{HR}{=} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{k+p}}{1+t)^p}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

De même qu'à la question 9.(b), pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leq \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} \leq t^{n+1+p}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+1+p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+p+2}.$$

Et le théorème des gendarmes nous assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0. En reprenant alors l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k} \\
&= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t)^p+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

D'où la propriété $\mathscr{P}(p+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $p \geq 1$, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ converge à l'ordre } p}$ et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 3
Partie I. Structure de SMag_n

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition, A appartient à SMag_n si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lambda \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \lambda.$$
Mais pour tous $i, k \in [\![1,n]\!]$:
$$[A \times J]_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}[J]_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$
Ainsi, la première condition se récrit :
$$\forall i, k \in [\![1,n]\!], \quad [A \times J]_{i,k} = \lambda = [\lambda J]_{i,k}.$$
De même, la deuxième condition se récrit :
$$\forall j, k \in [\![1,n]\!], \quad [J \times A]_{k,j} = \lambda = [\lambda J]_{k,j}.$$
Ainsi, $\boxed{A \in \mathsf{SMag}_n \text{ si, et seulement si, il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (avec } \lambda = d(A)) \text{ tel que } AJ = JA = \lambda J.}$

2. La matrice 0_n est bien semi-magique avec $d(0_n) = 0$.

   Prenons A, B dans SMag_n et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha A + B$ appartient à SMag_n à l'aide de la question 1, en calculant :
$$(\alpha A + B)J = \alpha AJ + BJ = \alpha d(A)J + d(B)J = (\alpha d(A) + d(B))J.$$
De même, $J(\alpha A + B) = (\alpha d(A) + d(B))J$. Ainsi, $\alpha A + B$ est bien une matrice semi-magique. Et $\boxed{\mathsf{SMag}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

   Et par le calcul précédent :
$$d(\alpha A + B) = (\alpha d(A) + d(B)).$$
Donc $\boxed{d \text{ est linéaire de } \mathsf{SMag}_n \text{ dans } \mathbb{R}.}$

3. On remarque tout d'abord que I_n appartient à SMag_n avec $d(I_n) = 1$.

   Considérons $A, B \in \mathsf{SMag}_n$. Alors $A - B$ est semi-magique car SMag_n est un sous-espace vectoriel. Montrons que $A \times B$ appartient à SMag_n à l'aide de la première question, en calculant :
$$(A \times B) \times J \underbrace{=}_{\times \text{ est associatif}} A \times (B \times J) = d(B) A \times J = d(A)d(B)J.$$
De même, $J \times (A \times B) = d(A)d(B)J$. Donc $A \times B$ est bien semi-magique. Par conséquent, $\boxed{\mathsf{SMag}_n \text{ est un sous-anneau de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

   Au passage, nous avons montré que $d(I_n) = 1$ et que pour tout $A, B \in \mathsf{SMag}_n$, $d(A \times B) = d(A)d(B)$. Donc $\boxed{d \text{ est un morphisme d'anneaux de } \mathsf{SMag}_n \text{ dans } \mathbb{R}.}$

4. Soit $A \in \mathsf{SMag}_n$ inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :
$$AJ = JA = d(A)J, \quad \text{d'où} \quad J = d(A)A^{-1}J = d(A)JA^{-1}.$$
La matrice J étant non nulle, $\boxed{d(A) \text{ est non nul}}$ et :
$$A^{-1}J = JA^{-1} = \frac{1}{d(A)}J.$$
Ainsi, $\boxed{A^{-1} \in \mathsf{SMag}_n \text{ et } d\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{d(A)}.}$

5. Une matrice $A \in \mathsf{SMag}_n$ telle que $d(A) \neq 0$ n'est pas nécessairement inversible. Par exemple, J est semi-magique telle que $d(J) = n$, et pourtant J n'est pas une matrice inversible puisqu'elle est équivalente par ligne à une matrice échelonnée avec un seul pivot.

Partie II. Dimension de SMag_n

6. d étant une forme linéaire, son image $\mathrm{Im}(d)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. C'est donc soit $\{0\}$, et d serait l'application nulle, soit $\mathbb{R}$, et d serait surjective. Puisque $d(J) = n \neq 0$, d n'est pas l'application nulle. Ainsi, $\boxed{d : \mathsf{SMag}_n \to \mathbb{R} \text{ est surjective.}}$

   Par le théorème du rang :

$$\dim(\mathsf{SMag}_n) = \dim(\mathrm{Ker}(d)) + \dim(\mathrm{Im}(d)) = \dim(\mathsf{SMag}_n^0) + 1.$$

   Ainsi, $\boxed{\dim(\mathsf{SMag}_n^0) = \dim(\mathsf{SMag}_n) - 1.}$

7. Par la question précédente :

$$\dim(\mathsf{SMag}_n) = \dim(\mathsf{SMag}_n^0) + 1 = \dim(\mathsf{SMag}_n^0) + \dim(\mathrm{Vect}(J)).$$

   Soit M une matrice dans $\mathsf{SMag}_n^0 \cap \mathrm{Vect}(J)$. D'une part, il existe λ réel tel que $M = \lambda J$. D'autre part, puisque M appartient à $\mathsf{SMag}_n^0)$:

$$0 = d(M) = d(\lambda J) = \lambda d(J) = n\lambda$$

   car d est linéaire. D'où $\lambda = 0$, et donc $M = 0_n$. Ainsi, $\mathsf{SMag}_n^0) \cap \mathrm{Vect}(J)$ est réduit à $\{0_n\}$.

   On conclut donc que :

$$\boxed{\mathsf{SMag}_n = \mathsf{SMag}_n^0 \oplus \mathrm{Vect}(J).}$$

8. Montrons que ψ est injective. Soit pour cela $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans le noyau de ψ. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2, \quad a_{i,j} = 0.$$

   Puisque A est une matrice semi-magique, la somme de ses $(n-1)$ premières lignes et $(n-1)$ premières colonnes est nulle, d'où :

$$a_{1,n} = a_{2,n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0 = a_{n,1} = a_{n,2} = \cdots = a_{n,n-1}.$$

   Et $a_{n,n} = 0$ car la somme de sa dernière ligne est également nulle. Finalement, $A = 0_n$, et ψ est bien injective.

   Reste à voir qu'elle est surjective. Mais pour tout $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} b_{1,j} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} b_{2,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \ldots & b_{n-1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} b_{n-1,j} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,1} & -\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,2} & \ldots & -\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,n-1} & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j} \end{pmatrix}$$

   est bien dans SMag_n^0, et est évidemment un antécédent de B par ψ.

   Donc $\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme entre } \mathsf{SMag}_n^0 \text{ et } \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})}$, si bien que :

$$\boxed{\dim \mathsf{SMag}_n^0 = \dim(\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})) = (n-1)^2.}$$

Enfin
$$\dim(\mathsf{SMag}_n) = \dim(\mathsf{SMag}_n^0) + 1 = (n-1)^2 + 1 \boxed{= n^2 - 2n + 2.}$$

9. Remarquons tout d'abord que pour tout $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, $A_{i,j}$ est bien une matrice semi-magique avec $d(A_{i,j}) = 0$.

   Soient $(\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$ une famille de scalaires tels que :
$$\sum_{1\leq i,j\leq n-1} \lambda_{i,j} A_{i,j} = 0_n.$$

   En considérant le coefficient en position $(k,\ell) \in [\![1, n-1]\!]^2$ dans cette égalité, on obtient $\lambda_{k,\ell} = 0$. Ceci étant vrai pour tout couple (k,ℓ), la famille $(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$ est libre, de cardinal $(n-1)^2 = \dim(\mathsf{SMag}_n^0)$, c'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathsf{SMag}_n^0.}$

   Puisque $\mathsf{SMag}_n = \mathsf{SMag}_n^0 \oplus \mathrm{Vect}(J)$, la famille obtenue par concaténation de la base $(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$ de SMag_n^0 et la base (J) de $\mathrm{Vect}(J)$ est $\boxed{\text{une base de } \mathsf{SMag}_n.}$

Partie III. Dimension de Mag_n

10. Il serait bien entendu possible d'utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels. On propose ici d'interpréter Mag_n comme intersection de noyaux d'applications linéaires.

    Les applications d et tr étant linéaires sur SMag_n, il en est de même de $d - \mathrm{tr}$. De même, $\sigma : A \in \mathsf{SMag}_n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{k,n+1-k}$ est une forme linéaire, et donc $d - \sigma$ l'est également.

    Alors $\mathsf{Mag}_n = \mathrm{Ker}(d - \mathrm{tr}) \cap \mathrm{Ker}(d - \sigma)$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathsf{SMag}_n}$ car intersection de sous-espaces vectoriels.

    $\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-anneau de } \mathsf{SMag}_n}$ tout simplement car $I_n \notin \mathsf{Mag}_n$: l'une de ses deux diagonales est de somme n, l'autre est de somme égale soit à 0 (si n est pair), soit 1 (si n est impair).

11. On procède comme à la question 6 : la forme linéaire $d_{|\mathsf{Mag}_n} : \mathsf{Mag}_n \to \mathbb{R}$ est surjective car $d(J) \neq 0$. Par le théorème du rang :
$$\boxed{\dim(\mathsf{Mag}_n) = \dim(\mathrm{Ker}(d)) + \dim(\mathrm{Im}(d)) = \dim(\mathsf{Mag}_n^0) + 1.}$$

12. (a) On montre aisément que θ est linéaire. Calculons $\theta(A_{1,1})$ où :
$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    Puisque $\mathrm{tr}\,(A_{1,1}) = 2$ et $\sigma\,(A_{1,1}) = -2$, $\boxed{\theta\,(A_{1,1}) = (2, -2).}$

    Pour $A_{2,2}$, on doit mettre de côté le cas $n = 3$, pour lequel $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\theta\,(A_{2,2}) = (2, 1)}$ dans ce cas. Si $n \geq 4$, alors $\theta\,(A_{2,2}) = (2, 0)$.

    Dans tous les cas, $\theta\,(A_{1,1})$ et $\theta\,(A_{2,2})$ ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de cardinal 2 de $\mathbb{R}^2$, et donc une base de $\mathbb{R}^2$.

    Ainsi, $\mathrm{Im}(\theta) = \mathbb{R}^2$, et $\boxed{\theta \text{ est surjective.}}$

(b) Par le théorème du rang appliqué à θ :

$$\dim(\mathsf{SMag}_n^0) = \dim(\mathrm{Ker}(\theta)) + \dim(\mathrm{Im}(\theta)) = \dim(\mathsf{Mag}_n^0) + 2.$$

Ainsi :

$$\dim(\mathsf{Mag}_n^0) = \dim(\mathsf{SMag}_n^0) - 2 = (n-1)^2 - 2 = n^2 - 2n - 1.$$

Et donc $\boxed{\dim(\mathsf{Mag}_n) = \dim(\mathsf{Mag}_n^0) + 1 = n^2 - 2n.}$