

**Devoir surveillé du 07/03/2026**

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

### Exercice 1 (Anneau des matrices circulantes)

Les différentes parties de cet exercice sont dans une large mesure indépendantes.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle *matrice circulante* (de taille  $n$ ) toute matrice de la forme :

$$C(x_0, \dots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix}$$

avec  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble de ces matrices et  $A$  la matrice  $C(0, 1, 0, \dots, 0)$ .

#### Partie I. Étude du cas $n = 3$

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on suppose que  $n = 3$ , et donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-anneau commutatif de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

2. Montrer que  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  est un élément inversible de l'anneau  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire que  $M$  est une matrice circulante et inversible et que son inverse  $M^{-1}$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

3. (a) Déterminer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(b) On note  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$  où  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ . Calculer le produit  $P \times Q$ , et en déduire que  $P$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $Q$ .

(c) Prouver que  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on explicitera.

#### Partie II. L'anneau des matrices circulantes

On revient à présent au cas général, où  $n \geq 2$  est quelconque.

4. Montrer que  $\mathcal{C}$  est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que pour tous  $M, N \in \mathcal{C}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda M + \mu N$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

5. Montrer que pour tous  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $C(x_0, \dots, x_{n-1}) \times A$  est une matrice circulante qu'on identifiera.

6. Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $e_i$  l'élément de  $\mathbb{C}^n$  dont toutes les composantes sont nulles sauf la  $(i+1)$ -ème qui vaut 1. Ainsi :

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_{n-1} = (0, \dots, 0, 1)$$

et avec cette notation,  $A = C(e_1)$ .

Montrer que  $A^k = C(e_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Que dire de  $A^n$  ?

7. En déduire que  $\mathcal{C} = \mathbb{C}[A]$  où  $\mathbb{C}[A]$  est l'ensemble des polynômes en  $A$ .
8. En déduire que  $\mathcal{C}$  est un sous-anneau commutatif de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Est-ce un corps ?

### Partie III. Diagonalisation de la matrice $A$

9. Soit  $\omega \in \mathbb{U}_n$ . On note  $X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . Montrer que  $AX_\omega = \omega X_\omega$ .

10. Dans la suite, on note  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , de sorte que  $\mathbb{U}_n = \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$ . On note  $P$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par :

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad [P]_{k,\ell} = \zeta^{(k-1)(\ell-1)}.$$

On remarquera que, avec les notations de la question précédente, la  $\ell^{\text{ème}}$  colonne de  $P$  est la matrice  $X_{\zeta^{\ell-1}}$ .

On note également  $\bar{P}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  obtenue en remplaçant chaque coefficient de  $P$  par son conjugué.

- (a) Calculer le produit  $P\bar{P}$ . En déduire que  $P$  est inversible.
- (b) On note  $D = \text{diag}(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1})$ . Montrer que  $AP = PD$ .

### Partie IV. Étude des inversibles de $\mathcal{C}$

Dans cette partie, on cherche à expliciter l'ensemble  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$  des inversibles de l'anneau  $\mathcal{C}$ .

Soit  $C(x_0, \dots, x_{n-1})$  une matrice circulante, où  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Notons  $Q$  le polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  défini par  $Q = x_0 + x_1X + \dots + x_{n-1}X^{n-1}$ . On va déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $C(x_0, \dots, x_{n-1})$  appartienne à  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ .

11. Dans cette question, on suppose que  $C(x_0, \dots, x_{n-1})$  appartient à  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ .
  - (a) Montrer que  $C(x_0, \dots, x_{n-1}) = Q(A)$ . En utilisant le résultat de la question 10, en déduire que :
 
$$P^{-1}C(x_0, \dots, x_{n-1})P = \text{diag}(Q(1), Q(\zeta), \dots, Q(\zeta^{n-1})).$$
  - (b) En déduire que  $Q(\zeta^k) \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , puis que les polynômes  $Q$  et  $X^n - 1$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{C}[X]$ .

12. Réciproquement, on suppose que les polynômes  $Q$  et  $X^n - 1$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{C}[X]$ .

À l'aide d'une identité de Bezout, montrer que  $C(x_0, \dots, x_{n-1})$  appartient à  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ .

13. Décrire l'ensemble  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$  des inversibles de l'anneau  $\mathcal{C}$  des matrices circulantes.

14. On suppose de nouveau  $n = 3$ , et on considère  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ . À l'aide des résultats obtenus dans cette partie, retrouver que  $M$  appartient à  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$  et déterminer son inverse.

**Exercice 2 (Approximation d'une fonction  $\mathcal{C}^n$  sur un segment par des polynômes)**

Les différentes parties de cet exercice sont dans une large mesure indépendantes.

Dans tout le problème, **on confond (identifie) un polynôme et sa fonction polynomiale associée sur  $[-1, 1]$** . Ceci sera justifié en préliminaire.

Le but de ce problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un segment par des polynômes coïncidant avec  $f$  en certains points.

Pour une fonction continue  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , on notera  $\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$  (dont l'existence est assurée par le préliminaire).

**Partie I. Résultats préliminaires**

1. Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ . On suppose que  $P(t) = Q(t)$  pour tout  $t \in [-1, 1]$ . Montrer que  $P = Q$ .

Dans tout le problème on confondra donc polynôme et fonction polynomiale associée sur  $[-1, 1]$ .

2. Si  $f$  est une fonction continue de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , justifier l'existence de  $\max_{t \in [-1, 1]} |f(t)|$ .

**Partie II. Polynômes de Tchebychev**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit sur  $[-1, 1]$  la fonction  $T_n$  par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

3. Calculer  $T_0$  et  $T_1$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

On pourra calculer  $T_{n+2}(x) + T_n(x)$ .

5. Calculer  $T_2$  et  $T_3$ .
6. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  est une fonction polynomiale.
7. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le degré de  $T_n$  et son coefficient dominant.
8. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer la parité de  $T_n$ .
9. (a) Justifier que :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre sur  $[0, \pi]$  l'équation  $\cos(n\theta) = 0$ .
- (c) On se donne  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $T_n$  est scindé dans  $\mathbb{R}$  et déterminer ses racines.
- (d) Donner la factorisation de  $T_n$  en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- (e) Montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Partie III. Minoration de la norme infinie sur  $\mathbb{R}_n[X]$** 

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré  $n$ ,  $\|P\|_\infty \geq 2^{1-n}$  et que cette inégalité est atteinte pour  $P = 2^{1-n}T_n$  où  $T_n$  désigne le  $n$ -ème polynôme de Tchebychev.

10. Montrer que  $\|T_n\|_\infty = 1$ .

11. Montrer que  $V_n = 2^{1-n}T_n$  est un polynôme unitaire et de degré  $n$  et que  $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$ .

12. Dans cette question, on suppose qu'il existe un polynôme  $P$  unitaire et de degré  $n$  tel que  $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$ , c'est-à-dire que pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $|P(t)| < 2^{1-n}$ . Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .

(a) Montrer que  $\deg(V_n - P) \leq n - 1$ .

(b) Donner le signe de  $(V_n - P)(x_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

(c) En déduire que  $V_n = P$ . Conclure.

**Partie IV. Majoration de l'erreur**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans cette partie, on considère une fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[-1, 1]$ . On se donne  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $[-1, 1]$  deux à deux distincts.

13. Justifier qu'il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(a_i) = f(a_i).$$

14. On note dans la suite  $S = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ , et on considère  $\varphi : x \in [-1, 1] \mapsto f(x) - P(x) - \lambda S(x)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dans cette question, on **fixe**  $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .

(a) Montrer qu'il est possible de choisir  $\lambda$  tel que  $\varphi(t) = 0$ . On fixe ainsi  $\lambda$  dans la suite de cette question.

(b) Montrer que  $\varphi$  s'annule  $n + 1$  fois au moins sur  $[-1, 1]$ .

(c) En déduire que  $\varphi^{(n)}$  s'annule au moins une fois sur  $[-1, 1]$ .

(d) Déterminer  $\varphi^{(n)}$  en fonction de  $f^{(n)}$ ,  $n$  et  $\lambda$ .

(e) En déduire qu'il existe  $a \in [-1, 1]$  tel que  $f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t)$ .

15. Déduire de la question précédente que pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |S(t)|$ , où  $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$ .

16. Pour quel choix de  $a_1, \dots, a_n$  la quantité  $\|S\|_\infty$  est-elle minimale ? Montrer qu'alors :

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{M_n}{n!} 2^{1-n}.$$