

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Densité de Schnirelmann)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{S_n(A)}{n} \geq 0$. La partie $E = \left\{ \frac{S_n(A)}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est donc non vide et minorée : elle admet une borne inférieure $\sigma(A)$. De plus, $\sigma(A) \geq 0$ par comparaison d'un minorant au plus grand d'entre eux.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(A) \leq \frac{S_n(A)}{n} \leq \frac{\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket)}{n} \leq 1$.

Ainsi, $\sigma(A)$ est bien défini et appartient à $[0, 1]$.

2. (a) Supposons que $1 \notin A$. Alors $A_1 = A \cap \{1\} = \emptyset$, et donc $\frac{S_1(A)}{1} = 0$ appartient à la partie E . Par conséquent, $\sigma(A) \leq 0$. Comme nous avons montré que $\sigma(A) \geq 0$, on obtient bien $\sigma(A) = 0$ si $1 \notin A$.
- (b) On suppose que $A \subset \mathbb{N}^*$. Montrons que $\sigma(A) = 1$ si, et seulement si, $A = \mathbb{N}^*$. On procède par double implications.

\Leftarrow Supposons que $A = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{S_n(A)}{n} = \frac{\text{Card}(A_n)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Donc $E = \{1\}$ dans ce cas et $\sigma(A) = \inf(E) = 1$.

\Rightarrow Supposons que $\sigma(A) = 1$. Montrons que $A = \mathbb{N}^*$. Soit pour cela $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$1 = \sigma(A) \leq \frac{S_n(A)}{n} \leq 1$$

et donc $S_n(A) = n$, soit encore $\text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = n$. Puisque $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et que $\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$, il vient que $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi :

$$n \in \llbracket 1, n \rrbracket = A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \subset A.$$

Donc $\mathbb{N}^* \subset A$, et comme par hypothèse $A \subset \mathbb{N}^*$, on obtient bien $A = \mathbb{N}^*$.

3. Supposons $A \subset B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ est inclus dans $B_n = B \cap \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc :

$$\sigma(A) \leq \frac{S_n(A)}{n} \leq \frac{\text{Card}(A_n)}{n} \leq \frac{\text{Card}(B_n)}{n}.$$

Le réel $\sigma(A)$ apparaît comme un minorant de $F = \left\{ \frac{S_n(B)}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Par comparaison d'un minorant au plus grand d'entre eux, $\sigma(A) \leq \sigma(B)$.

4. (a) Supposons que A est une partie finie. En particulier, A est bornée et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset [-N, N]$. Alors, pour tout $n \geq N$:

$$A_n = A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \subset [-N, N] \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \llbracket 1, N \rrbracket$$

et donc :

$$\sigma(A) \leq \frac{S_n(A)}{n} = \frac{N}{n}.$$

Par passage à la limite dans les inégalités quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient l'inégalité $\sigma(A) \leq 0$. Comme de plus, $\sigma(A) \geq 0$ par la question 1, on peut donc conclure que $\sigma(A) = 0$ lorsque A est une partie finie.

- (b) On suppose dans cette question que $A = \{2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$1 \leq 2k + 1 \leq n \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Ainsi :

$$S_n(A) = \text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Remarquons que $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{n-1}{2}$ et :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \frac{n-2}{2} \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

$$\frac{n-2}{2} \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{n-1}{2}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} = \frac{\frac{n-2}{2} + 1}{n} \leq \frac{S_n(A)}{n} \leq \frac{\frac{n-1}{2} + 1}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Ainsi, $\frac{1}{2}$ est un minorant de E , de sorte que $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$:

$$\sigma(A) \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Puisque $\frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$, on obtient $\sigma(A) \leq \frac{1}{2}$ par passage à la limite dans les inégalités.

Finalement, $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ lorsque A est l'ensemble des entiers impairs.

- (c) Vérifions que $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{1\}$ convient. Cette partie contient bien 1. Elle est aussi dense dans \mathbb{R} car elle contient la partie $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui est dense dans \mathbb{R} .

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = A \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \{1\}, \text{ et donc } S_n(A) = 1.$$

Par conséquent, $\sigma(A) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient $\sigma(A) \leq 0$. Comme de plus $\sigma(A) \geq 0$ par la première question, la partie A proposée satisfait bien $\sigma(A) = 0$.

Exercice 2 (Une suite récurrente faisant intervenir une homographie)

1. (a) La fonction f est dérivable sur D en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

- (b) Puisque $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in D$, f est décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

**Mise en garde.**

Le domaine de définition D de f n'étant pas un intervalle, on ne peut conclure que f est décroissante sur D !

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$. La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

D'autre part, pour tout $x \in D$:

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et $-\infty$. On en déduit le tableau de variation suivant pour f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	2	$+\infty$	2
	↘		↘
		$-\infty$	

- (c) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$, décroissante sur cet intervalle, et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Ainsi, $f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$ et est inclus dans $]1, +\infty[$.
- (d) L'intervalle $J =]1, +\infty[$ est stable par f et contient $u_0 = 3$. Montrons par récurrence la propriété suivante pour tout $n \geq 0$:

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n \text{ est bien défini et } u_n \in J \text{ ».}$$

I Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ est bien défini et appartient à J .

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n .

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et appartient à J . Puisque J est inclus dans le domaine D de définition de f et que cet intervalle est stable par f , $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et appartient à J . D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

- (e) Soit $x \in D$. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = x \Leftrightarrow 2x-1 = x(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $5 > 0$, et ses deux racines réelles distinctes sont $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Remarquons enfin que :

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \geq \frac{3}{2} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3^2 - 5}{2(3 + \sqrt{5})} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} < 1.$$

Ainsi, f admet deux points fixes $\ell = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \in]1, +\infty[$ et $\ell' = \frac{1}{\ell} \in]-\infty, 1[$.

- (f) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $f \circ f(x)$ est bien définie si, et seulement si, $x \in D$ et $f(x) \in D$, ce qui équivaut à $x \neq 1$ et $f(x) \neq 1$.

Résolvons, pour $x \neq 1$, l'équation :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, le domaine de définition de $f \circ f$ est $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $f \circ f(x)$ est bien défini, et :

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{2x - 1}{x - 1}\right) = \frac{2\frac{2x-1}{x-1} - 1}{\frac{2x-1}{x-1} - 1} = \frac{4x - 2 - (x - 1)}{2x - 1 - (x - 1)} = \frac{3x - 1}{x} = 3 - \frac{1}{x}.$$

2. (a) Calculons (en privilégiant l'utilisation de $f \circ f$ à celle de f car son expression est plus simple pour les calculs) :

$$u_1 = f(u_0) = \frac{2u_0 - 1}{u_0 - 1} = \frac{6 - 1}{3 - 1} = \frac{5}{2}, \quad u_2 = f \circ f(u_0) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3},$$

$$u_3 = f \circ f(u_1) = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}, \quad u_4 = f \circ f(u_2) = 3 - \frac{3}{8} = \frac{21}{8}.$$

On remarque que $u_0 > u_1$ et que $u_1 < u_2$: la suite (u_n) n'est donc pas monotone.

- (b) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $J =]1, +\infty[$, et satisfait $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{8}{3} \leq 3$ et $f(3) = \frac{5}{2}$. Ainsi, $f\left(\left[\frac{5}{2}, 3\right]\right) \subset \left[\frac{5}{2}, 3\right]$ et l'intervalle $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ est stable par f . Comme de plus u_0 appartient à $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$, on montre par récurrence, comme dans la question

1.(d), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{2} \leq u_n \leq 3$.

- (c) Supposons la suite (u_n) convergente et notons α sa limite. Par passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question précédente, α appartient à l'intervalle $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$. De plus, par définition de la suite (u_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

En passant à la limite dans cette égalité (on utilise ici la caractérisation séquentielle de la limite et la continuité de f sur D) :

$$\alpha = f(\alpha).$$

Ainsi, α est un point fixe de f strictement supérieur à 1. Par la question 1.(e), $\alpha = \ell$ nécessairement. Ainsi, si (u_n) est convergente, alors sa limite est ℓ .

3. (a) Notons comme dans l'énoncé $a = \frac{4}{21}$ et $b = \frac{46}{21}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq au_n + b &\Leftrightarrow \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} \leq au_n + b \stackrel{u_n > 1}{\Leftrightarrow} 2u_n - 1 \leq (au_n + b)(u_n - 1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq au_n^2 + \underbrace{(b - a - 2)}_{=0} u_n + 1 - b \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4u_n^2 - 25 \Leftrightarrow \frac{25}{4} \leq u_n^2. \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $u_n \geq \frac{5}{2}$ par la question

2.(b). Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq au_n + b.}$

- (b) Définissons la suite (α_n) par $\alpha_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b$.

Montrons par récurrence que $u_n \leq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I La propriété est trivialement vérifiée pour $n = 0$ puisque $u_0 = 3 = \alpha_0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \alpha_n$. Par la question précédente :

$$u_{n+1} \leq au_n + b \leq a\alpha_n + b = \alpha_{n+1}$$

par hypothèse de récurrence, en notant bien que $a \geq 0$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{u_n \leq \alpha_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

La suite (α_n) est arithmético-géométrique. Déterminons son expression explicite. Cherchons pour cela $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = a\alpha + b. \quad (*)$$

Puisque $a \neq 1$, l'unique solution de (*) est $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{46}{21\left(1 - \frac{4}{21}\right)} = \frac{46}{17}$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b. \quad (**).$$

En soustrayant (*) par (**):

$$(\alpha_{n+1} - \alpha) = a(\alpha_n - \alpha).$$

La suite $(\alpha_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a , de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n - \alpha = a^n(\alpha_0 - \alpha), \quad \text{soit} \quad \alpha_n = a^n(3 - \alpha) + \alpha.$$

Puisque $|a| < 1$, $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ converge vers } \alpha = \frac{46}{17}.}$

- (c) Puisque (α_n) , par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{17}$, il existe un rang N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{45}{17} \leq \alpha_n \leq \frac{47}{17}.$$

Par l'inégalité obtenue à la question précédente, pour tout $n \geq N$:

$$\boxed{u_n \leq \alpha_n \leq \frac{47}{17}.}$$

Puisque $\frac{47}{17} \leq 3$, $\boxed{\text{cette majoration améliore celle obtenue en question 2.(b).}$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = f \circ f(v_n) = 3 - \frac{1}{v_n}.$$

Et de même :

$$w_{n+1} = 3 - \frac{1}{w_n}.$$

(b) La fonction f étant décroissante sur $]1, +\infty[$, $f \circ f$ est croissante sur cet intervalle. De plus :

$$f \circ f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \geq \frac{5}{2}, \quad f \circ f(\ell) = f(\ell) = \ell, \quad f \circ f(3) = 3 - \frac{1}{3} \leq 3.$$

Ainsi, les intervalles $\left[\frac{5}{2}, \ell\right]$ et $[\ell, 3]$ sont des intervalles stables par $f \circ f$, et contiennent respectivement $v_0 = \frac{5}{2}$ et $w_0 = 3$.

En procédant par récurrence comme à la question 1.(d), on montre que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{5}{2} \leq v_n \leq \ell \text{ et } \ell \leq w_n \leq 3.}$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$ et $w_{n+1} \leq w_n$.

I Par les calculs déjà effectués :

$$v_1 = u_3 = \frac{13}{5} \geq \frac{5}{2} = u_1 = v_0$$

et :

$$w_1 = u_2 = \frac{8}{3} \leq 3 = u_0 = w_0.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leq v_{n+1}$ et $w_{n+1} \leq w_n$.

Par croissance de la fonction $f \circ f$:

$$v_{n+1} = f \circ f(v_n) \leq f \circ f(v_{n+1}) = v_{n+2} \quad \text{et} \quad w_{n+2} = f \circ f(w_{n+1}) \leq f \circ f(w_n) = w_{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement croissante et décroissante.

La suite (v_n) est croissante et majorée par ℓ . Elle converge donc vers une limite x appartenant à $\left[\frac{5}{2}, \ell\right]$. De plus, on montre de même qu'à la question 2.(c) que x est un point fixe de $f \circ f$. Mais alors :

$$3 - \frac{1}{x} = x, \quad \text{soit} \quad x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Mais on l'a vu, cette équation n'admet qu'une unique solution dans $]1, +\infty[$, à savoir ℓ . Ainsi, la suite (v_n) converge vers ℓ .

En procédant de même, on montre que (w_n) converge vers ℓ . D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n) = \ell - \ell = 0.$$

Les suites (v_n) et (w_n) sont donc adjacentes.

(d) Les suites extraites paire et impaire de (u_n) convergent vers la même limite ℓ . Par le cours, la suite (u_n) converge donc vers ℓ .

5. (a) Notons pour commencer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$, de sorte que l'intégrale considérée est bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\ell}^{u_n} f'(t) dt = [f(t)]_{\ell}^{u_n} = f(u_n) - f(\ell) = u_{n+1} - \ell.$$

D'où :

$$|u_{n+1} - \ell| = \left| \int_{\ell}^{u_n} f'(t) dt \right| \leq \left| \int_{\ell}^{u_n} |f'(t)| dt \right|.$$

Pour tout $t \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$:

$$|f'(t)| = \frac{1}{(t-1)^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2} = \frac{4}{9}.$$

Puisque ℓ et u_n appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \left| \int_{\ell}^{u_n} \frac{4}{9} dt \right| = \frac{4}{9} |u_n - \ell|.$$

(b) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

I Pour $n = 0$:

$$0 \leq u_0 - \ell = 3 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq \frac{3 - \sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété établie au rang n .

Par la question précédente, puis par hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9} |u_n - \ell| \leq \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, par théorème des gendarmes, (u_n) converge et sa limite est ℓ .

6. Puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2^{11}}$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\ell - 2^{-11} \leq u_n \leq \ell + 2^{-11}.$$

Précisons un rang n_0 qui convient grâce à l'inégalité établie à la question précédente. Pour cela, on résout l'inéquation suivante d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 2^{-11} &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 2^{-10} \Leftrightarrow 2^{2n+10} \leq 3^{2n} \Leftrightarrow 2n + 10 \leq 2n \log_2(3) \\ &\Leftrightarrow 5 \leq n(\log_2(3) - 1) \Leftrightarrow \underbrace{\log_2(3) - 1}_{>0} \leq \frac{5}{n} \Leftrightarrow \frac{5}{\log_2(3) - 1} \leq n. \end{aligned}$$

L'entier $n_0 = 1 + \left\lfloor \frac{5}{\log_2(3) - 1} \right\rfloor$ convient. En effet, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 2^{-11}$ par les équivalences précédentes, et donc :

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 2^{-11}.$$

Exercice 3 (Dénombrement)

1. C'est du cours : le cardinal de \mathfrak{S}_n est $n!$.
2. On a $\mathfrak{S}_1 = \{\text{id}_{\{1\}}\}$, $\mathfrak{S}_2 = \left\{ \text{id}_{\{1,2\}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ et :

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \text{id}_{\{1,2,3\}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

On observe alors que $d_1 = 0, d_2 = 1$ et $d_3 = 2$ (seules deux permutations n'ont pas de point fixe dans \mathfrak{S}_3).

3. (a) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq \ell \leq k \leq n$. Calculons :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \frac{n!}{\cancel{k!} (n-k)! \ell! (k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell! (n-\ell)! \ell! (k-\ell)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

Autre méthode. Dans un ensemble E à n éléments, dénombrons de deux manières différentes le nombre de parties A et B à k et ℓ éléments avec $k \geq \ell$ et $B \subset A$:

- pour construire de telles parties, on peut choisir une partie A à k éléments de E , puis une partie B à ℓ éléments de A . Il y a $\binom{n}{k} \times \binom{k}{\ell}$ manières de choisir de telles parties ;
- on peut aussi choisir une partie B à ℓ éléments de E , puis la compléter à l'aide de $k - \ell$ éléments de $E \setminus B$ afin d'obtenir une partie A à k éléments de E contenant B . Il y a $\binom{n}{\ell} \times \binom{n-\ell}{k-\ell}$ choix possibles en dénombrant de cette manière.

D'où l'égalité $\boxed{\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}}$.

- (b) Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} u_\ell \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} u_\ell && \text{par la question précédente} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} u_\ell && \text{en permutant les deux sommes} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} && \text{par le glissement d'indice } i = k - \ell \end{aligned}$$

Si $\ell = n$, alors $\sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} = (-1)^0 \binom{0}{0} = 1$. Si $0 \leq \ell < n$, par la formule du binôme :

$$\sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} = (1 + -1)^{n-\ell} = 0.$$

Ainsi, en reprenant le calcul précédent :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} = u_n.$$

D'où la formule d'inversion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k.}$$

4. (a) Soit $n \geq 1$. Partitionnons \mathfrak{S}_n selon le nombre de points fixes de chaque permutation σ :

- si σ n'a aucun point fixe, c'est un dérangement. Il y a d_n telles permutations ;
- si σ a un point fixe $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors σ est un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a\}$. Dénombrons de telles permutations : il y a $\binom{n}{1}$ choix possibles pour le point fixe a , puis d_{n-1} dérangements possibles d'un ensemble à $n-1$ éléments, soit en tout $\binom{n}{1} \times d_{n-1}$ telles permutations ;
- plus généralement, si σ est une permutation ayant $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ points fixes a_1, \dots, a_k , elle induit un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour les k points fixes, et d_{n-k} dérangements d'une partie à $(n-k)$ éléments, soit en tout $\binom{n}{k} d_{n-k}$ telles permutations ;
- il n'y a qu'une permutation ayant $n-1$ points fixes ou ayant n points fixes, à savoir l'identité. Ce qui correspond bien à $\binom{n}{n-1} d_1 + \binom{n}{n-1} d_0 = 1$ choix possible.

Ainsi, puisque $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$, on obtient :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} d_i = \boxed{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_i.}$$

(b) Par la formule d'inversion, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \boxed{n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5. (a) Puisque σ est un dérangement de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, il n'admet pas de point fixe, de sorte que $\boxed{k = \sigma(n+1) \neq n+1.}$

(b) Supposons que $\sigma(k) = n+1$. Dans ce cas, σ échange les éléments k et $n+1$. Il laisse donc stable l'ensemble $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k, n+1\}$, et induit un dérangement sur cet ensemble à $n-1$ éléments. Et $\boxed{\text{le nombre de tels dérangements est } d_{n-1}.}$

(c) i. Remarquons que :

$$\sigma'(k) = \sigma \circ \tau(k) = \sigma(n+1) = k.$$

Donc k est un point fixe de σ' , et σ' induit une permutation de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$. Montrons que cette permutation est un dérangement de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ tel que $\sigma'(a) = a$. Si $a \neq n+1$:

$$a = \sigma \circ \tau(a) = \sigma(a)$$

ce qui est impossible car σ n'a pas de point fixe. Si $a = n + 1$, alors :

$$n + 1 = \sigma \circ \tau(n + 1) = \sigma(k)$$

ce qui est faux par hypothèse.

Ainsi, $\sigma' = \sigma \circ \tau$ induit un dérangement de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket \setminus \{k\}$.

- ii. Soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1}$ une permutation qui induit un dérangement de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket \setminus \{k\}$, et donc qui fixe k . Posons $\sigma = \sigma' \circ \tau$.

Montrons que σ est un dérangement de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ tel que $\sigma(a) = a$. On a trois cas à distinguer :

- si $a \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket \setminus \{k, n + 1\}$, alors $a = \sigma(a) = \sigma' \circ \tau(a) = \sigma'(a)$, et σ' aurait un point fixe distinct de k , ce qui est faux ;
- si $a = k$, alors $k = \sigma(k) = \sigma' \circ \tau(k) = \sigma'(n + 1)$, ce qui est faux car k est fixé par σ' , et donc k est l'unique antécédent par σ' de k ;
- si $a = n + 1$, alors $n + 1 = \sigma(n + 1) = \sigma' \circ \tau(n + 1) = \sigma'(k)$, ce qui est faux car k est fixé par σ' .

Ainsi, σ est bien un dérangement de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, et satisfait :

$$\sigma(n + 1) = \sigma' \circ \tau(n + 1) = \sigma'(k) = k \quad \text{et} \quad \sigma(k) = \sigma' \circ \tau(k) = \sigma'(n + 1) \neq n + 1$$

car $n + 1$ n'est pas fixé par σ' .

- iii. Les deux questions précédentes établissent une correspondance bijective¹ entre les dérangements de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ envoyant $n + 1$ sur k et les dérangements de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ fixant k . Ces derniers étant au nombre de d_n , il y a donc d_n dérangements \mathfrak{S}_{n+1} tels que $\sigma(k) \neq n + 1$.

(d) D'après ce qui précède, le choix d'un dérangement de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ se ramène :

- au choix d'un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: il y a pour cela n possibilités ;
- puis selon les cas :
 - soit k est envoyé sur $n + 1$: il y a d_{n-1} tels dérangements ;
 - soit k n'est pas envoyé sur $n + 1$: il y a d_n tels dérangements.

Ainsi :

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}).$$

6. On effectue une récurrence sur $n \geq 2$.

I Pour $n = 2$, $d_2 = 1$ et $2d_1 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$, donc la propriété est satisfaite pour $n = 2$.

H Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vraie au rang n . Par la question précédente puis par hypothèse de récurrence :

$$d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1} = nd_n + (d_n - (-1)^n) = (n + 1)d_n + (-1)^{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ pour tout $n \geq 2$.

¹On vérifie sans difficulté que $\varphi : \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ et $\psi : \sigma' \mapsto \sigma' \circ \tau$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre, notamment en notant que $\tau \circ \tau = \text{id}$.

7. Soient $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$. En divisant l'égalité de la question précédente par $k!$:

$$\frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Sommons ces égalités pour $k = 2, \dots, n$. Par télescopage :

$$\frac{d_n}{n!} = \frac{d_n}{n!} - \frac{d_1}{1!} = \sum_{k=2}^n \frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

car les deux premiers termes de cette somme valent 1 et -1 . D'où :

$$\boxed{d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}.$$

Et cette égalité est encore vraie pour $n = 1$ car alors $1! \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{k!} = 1 + (-1) = 0 = d_1$.

8. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « si A_1, \dots, A_n sont n parties finies d'un ensemble E , alors

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \text{ »}$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

I Pour $n = 2$, il s'agit de la formule du cours :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

H Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Soient A_1, \dots, A_{n+1} des parties finies de E . Alors :

$$\begin{aligned} & \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) \\ &= \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) + \text{Card}(A_{n+1}) - \text{Card}((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \quad (\text{cas } n = 2) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \text{Card}((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})) \quad (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1}) \quad (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^\ell \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell-1} \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell-1} \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \end{aligned}$$

À $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé dans la première somme figure toutes les intersections de k ensembles parmi A_1, \dots, A_n (sans A_{n+1}). Et à $\ell \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ fixé dans la seconde somme figure toutes les intersections de $\ell - 1$ ensembles parmi A_1, \dots, A_n , avec A_{n+1} . En regroupant ces deux sommes, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, toutes les intersections de k ensembles parmi A_1, \dots, A_{n+1} , ce qui donne :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, nous avons donc démontré la formule du crible.

9. (a) Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. L'ensemble $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est constitué des permutations fixant i_1, i_2, \dots, i_k . La donnée d'une telle permutation est totalement déterminée par celle d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, c'est-à-dire d'un ensemble à $(n-k)$ éléments : il y a $(n-k)!$ telles permutations. Ainsi :

$$\boxed{\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!}$$

- (b) Une permutation σ n'est pas un dérangement si, et seulement si, elle admet au moins un point fixe, ce qui équivaut à l'existence d'un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) = i$. D'où l'égalité suivante :

$$\overline{D}_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Par la formule du crible :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{D}_n) &= \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! \end{aligned}$$

À k fixé, choisir k entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ revient à choisir k éléments parmi n . D'où :

$$\text{Card}(\overline{D}_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

Et finalement :

$$d_n = \text{Card}(\mathfrak{S}(E)) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = \boxed{n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}.$$

Exercice 4

1. Par définition, la partie A est incluse dans $[0, 1]$, elle est donc bornée, majorée par 1 et minorée par 0. Reste à montrer qu'elle est non vide.

Considérons pour cela $h : x \in [0, 1] \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue car composée de fonctions qui le sont, et satisfait :

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

car f est à valeurs dans $[0, 1]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $h(c) = 0$. Ainsi, c appartient à A et A est non vide.

En tant que partie non vide, majorée et minorée, A possède une borne inférieure a et une borne supérieure b . Notons au passage que $a \geq 0$ et $b \leq 1$ puisque A est majorée par 1 et minorée par 0.

2. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers b . Mais alors, par définition de A , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x_n) = x_n.$$

Puisque f est continue en b , par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ (on utilise ici la caractérisation séquentielle de la continuité) :

$$f(b) = b.$$

Donc b appartient bien à A .

3. En utilisant que $b \in A$ et que g et f commutent :

$$f(g(b)) = f \circ g(b) = g \circ f(b) = g(f(b)) = g(b).$$

Ainsi, $g(b)$ appartient à A .

Puisque b est la borne supérieure de A , b est en particulier un majorant de A . Et comme $g(b)$ appartient à A , on en déduit l'inégalité $g(b) \leq b$.

4. En effectuant une étude similaire, on montrerait que $a \in A$, que $g(a) \in A$, puis que $g(a) \geq a$.

Considérons alors $\varphi : x \in [0, 1] \mapsto f(x) - g(x)$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus :

$$\varphi(a) = f(a) - g(a) = a - g(a) \leq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b) - g(b) = b - g(b) \geq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c entre a et b tel que $\varphi(c) = 0$.

On peut donc conclure à l'existence d'un réel c appartenant à $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.
