

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Construction du pentagone régulier à la règle et au compas)

1. Il s'agit des racines 5-ième de l'unité, à savoir les $e^{2ik\pi/5}$ avec $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

2. (a) On remarque que :

$$z^5 - 1 = z^5 - 1^5 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Ainsi, $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

(b) Remarquons que $z = 0$ n'est pas solution. On peut donc diviser l'équation par z^2 :

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z - 1 = 0.$$

Cette dernière équation admet pour racines réelles $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On est amené à résoudre les équations suivantes :

- On résout :

$$Z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0.$$

Cette équation admet pour racines les complexes :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})}}{2}.$$

- On résout de même :

$$Z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0.$$

Cette équation admet pour racines complexes :

$$z_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}.$$

Les quatre racines complexes de Q sont donc z_1, z_2, z_3, z_4 .

3. (a) Les solutions trouvées à la question 1 et à la 2.(b) sont égales une à une.

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, le complexe $e^{2i\pi/5}$ a une partie réelle et une partie imaginaire positives. D'où :

$$e^{2i\pi/5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}$$

et donc :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, le complexe $e^{4i\pi/5}$ a une partie réelle négative et une partie imaginaire positive. D'où :

$$e^{4i\pi/5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}$$

et donc :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}.$$

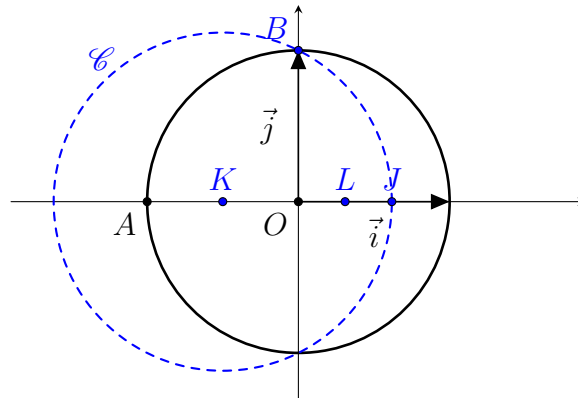
(b) Avec les formules trigonométriques,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}.$$

Avec la question précédente et après simplification, on obtient $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 3}{8}$

et donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 3}}{2\sqrt{2}}$ (car $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$).

4. (a) Puisque les points A_0, \dots, A_4 ont pour affixe les racines 5-ièmes de l'unité, le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.
- (b) On construit à la règle et au compas le cercle de centre O et de rayon 1 cm, les points O, B, K (en traçant la médiatrice du segment $[A, O]$), J et L (en traçant la médiatrice du segment $[O, J]$).



(c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle KOB rectangle en O :

$$BK^2 = KO^2 + OB^2 = \frac{5}{4} \quad \text{donc} \quad BK = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Puisque K est le centre du cercle passant par B et J , $BK = KJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

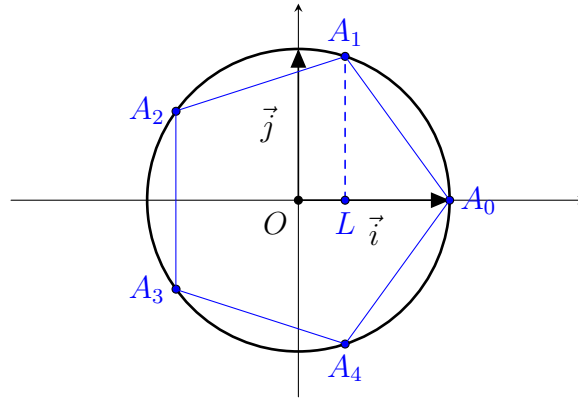
Les points K, O et J étant alignés, $OJ = KJ - KO = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Par hypothèse, L est le milieu de $[OJ]$. Donc $OL = \frac{1}{2}OJ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

A_1 a pour affixe $e^{2i\pi/5}$, c'est-à-dire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Comme L est sur l'axe des abscisses et que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, L est bien la projection orthogonale de A_1 sur l'axe des abscisses.

- (d) Une fois construit le point L , on trace à la règle et au compas la perpendiculaire à l'axe des abscisses qui passe par L . Les points d'intersections de cette droite avec le cercle unité sont A_0 (d'ordonnée positive) et A_1 . On obtient alors A_2 en traçant le cercle de centre A_1 de rayon A_0A_1 , puis de même A_3 . D'où une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.



Le saviez-vous ?

Vous savez depuis longtemps construire à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas :

- la bissectrice d'un angle ;
- la médiatrice d'un segment ;
- la perpendiculaire à une droite passant par un point ;
- un hexagone régulier inscrit dans un cercle donné...

Mais quelles autres constructions sont possibles uniquement à la règle et au compas ? Peut-on par exemple couper un angle en 3 ? Ou construire un polygone régulier à 7 côtés ?

Quelques définitions

Dans toute la suite, on considère deux points distincts O et I du plan. Soit P un ensemble de points du plan. On considère les 2 catégories d'objets suivants :

- (1) les droites (AB) , où A et B sont des éléments de P .
- (2) les cercles centrés en un point de P , et de rayon AB , où A et B sont des éléments de P .

Ces 2 catégories d'objets sont donc tous les cercles et toutes les droites que l'on peut construire à partir des points de P .

Un point M du plan est dit *constructible à la règle et au compas en une étape* à partir de P s'il existe deux éléments distincts de (1) et (2) dont M est point d'intersection.

Un point M est dit *constructible à la règle et au compas à partir de P* s'il existe des points M_1, \dots, M_n tels que M_i soit constructible en une étape à partir de P et des points précédemment construits.

Lorsque l'ensemble des points que l'on se donne au départ est constitué de O et de I , on dit simplement que M est *constructible* (à la règle et au compas).

Constructibilité des polygones réguliers

On a montré dans cet exercice que le pentagone régulier (plus précisément ses sommets) est constructible à la règle et au compas. Et on en a donné une construction !

On peut montrer le résultat suivant dû à Wantzel, qui caractérise exactement les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas.

Le polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, n est de la forme :

$$n = 2^k \times p_1 \times \cdots \times p_r$$

où $k, r \in \mathbb{N}$ et p_1, \dots, p_r sont des nombres premiers de Fermat.

Rappelons qu'un nombre premier p est dit *premier de Fermat* s'il est de la forme $2^{2^q} + 1$. On ne connaît que 5 nombres premiers de Fermat : 3, 5, 17, 257, 65537. On ignore s'il en existe d'autres...

Ainsi, on peut tracer à la règle et au compas un polygone régulier à 15 ou $68 = 2^2 \times 17$ côtés, mais pas un polygone régulier à 7 ou $25 = 5^2$ côtés. Et bien que ce résultat assure la constructibilité (ou non) d'un polygone régulier, il ne donne aucune méthode de construction effective d'un tel polygone.

D'autres constructions impossibles à la règle et au compas

Les problèmes de constructibilité à la règle et au compas sont liés à la théorie des corps, et particulièrement à la notion de degré d'extension de corps. Outre le théorème de Wantzel, on peut montrer à l'aide de ces notions les résultats suivants :

- **la trisection d'un angle** : à part pour des angles particuliers, il est en général impossible de couper un angle en 3 angles égaux, uniquement à la règle et au compas.
- **la quadrature du cercle** : il est impossible, étant donné un cercle, de construire un carré de même aire, uniquement à l'aide de la règle et du compas.
- **la duplication du cube** : si on a un patron de cube, il est impossible de construire un patron de cube dont le volume soit double du premier.

Et avec seulement un compas ?

Enfin, on peut se contenter d'étudier les points qui sont constructibles au compas seul. Et, bizarrement, ce sont les mêmes que ceux qui sont constructibles à la règle et au compas ! C'est le théorème de Mohr-Mascheroni.

Exercice 2 (Puissances d'un complexe de module 1)

1. Il s'agit donc de calculer $|e^{i\alpha} - e^{i\beta}|$. Mais :

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} 2i \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Et donc :

$$|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = 2|i| \left| \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \right|.$$

Partie I. Le cas où $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

2. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$, de sorte que $\alpha = \frac{p}{q}\pi$. Alors :

$$z_{2q} = e^{2iqp\pi} = 1 \quad \text{et donc} \quad 2q \in A.$$

Ainsi, $A \neq \emptyset$.

3. (a) Par définition de m , $(e^{i\theta})^m = 1$, et donc $e^{i(m-1)\theta}e^{i\theta} = 1$, si bien que :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(m-1)\theta} = z_{m-1}.$$

D'où l'existence d'un entier $p = m - 1 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{e^{i\theta}} = z_p$.

Notons $V_+ = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $V_- = \{z_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$, de sorte que $V = V_+ \cup V_-$. Montrons que $V = V_+$ par double inclusions.

\supseteq De manière immédiate, $V_+ \subset V_+ \cup V_- = V$.

\subseteq Soit k est un entier strictement négatif. Alors :

$$z_k = (e^{i\theta})^k = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-k} = (e^{ip\theta})^{-k} = z_{-kp}.$$

Et donc $V_- \subset V_+$, si bien que $V = V_+ \cup V_- \subset V_+$.

Ainsi, $V = V_+ = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$.

- (b) Soit $z \in V$. Par la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z = z_n = e^{in\theta}$. Et alors :

$$z^m = e^{inm\theta} = (e^{im\theta})^n = 1^n = 1.$$

D'où $z \in \mathbb{U}_m$. On a donc déjà $V \subset \mathbb{U}_m$.

Puisque nous savons que \mathbb{U}_m contient exactement m éléments, prouvons qu'il en est de même de V , en prouvant que z_0, z_1, \dots, z_{m-1} sont deux à deux distincts.

Supposons par l'absurde qu'il existe $p, q \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, distincts, avec $z_p = z_q$. Quitte à les échanger, supposons que $p \leq q$. Alors :

$$z_p = z_q \Leftrightarrow e^{ip\theta} = e^{iq\theta} \Leftrightarrow 1 = e^{i(q-p)\theta} \Leftrightarrow z_{q-p} = 1.$$

Ceci prouve que $q - p \in A$. Mais puisque $q - p \leq m - 1 < m$, ceci contredit la minimalité de m dans A .

Ainsi, z_0, z_1, \dots, z_{m-1} sont deux à deux distincts, si bien que V contient au plus m éléments distincts. Étant inclus dans \mathbb{U}_m de cardinal m , on peut conclure que

$$V = \mathbb{U}_m.$$

Partie II. Le cas où $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

4. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $z_{n_1} = z_{n_2}$. Alors $e^{in_1\alpha} = e^{in_2\alpha}$, si bien que $n_1\alpha \equiv n_2\alpha [2\pi]$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(n_1 - n_2)\alpha = 2k\pi.$$

Si on avait $n_1 \neq n_2$, alors on aurait $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2k}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc $n_1 = n_2$.

Ainsi, les z_n sont deux à deux distincts.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

Cette condition est par exemple vérifiée pour $n = \left\lfloor \frac{2\pi}{\varepsilon} \right\rfloor + 2$, qui est bien supérieur ou égal à 2.

6. Vérifions les trois conditions qui définissent une partition.

- Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \in A_k$, si bien que $A_k \neq \emptyset$.
- Soit $z \in \mathbb{U}$, et soient $\alpha = \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$ et $k = \left\lfloor \frac{n\alpha}{2\pi} \right\rfloor$. Alors :

$$k \leq \frac{n\alpha}{2\pi} < k+1, \quad \text{d'où} \quad \frac{2k\pi}{n} \leq \alpha < \frac{2(k+1)\pi}{n}$$

et donc $z \in A_k$. Ainsi, $\mathbb{U} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$. L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient

$$\mathbb{U} = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k.$$

- Reste à prouver que les A_k sont deux à deux disjoints. Soient pour cela k, k' tels que $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset$, et soit $z \in A_k \cap A_{k'}$.

Puisque $z \in A_k$ et $z \in A_{k'}$:

$$\frac{2k\pi}{n} \leq \text{Arg}(z) < \frac{2(k'+1)\pi}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2k\pi}{n} < \frac{2(k'+1)\pi}{n}$$

et donc $2k < 2(k'+1)$. Puisque nous sommes en présence d'entiers, on en déduit que $2k \leq 2(k'+1) - 1 = 2k' + 1$. Et puisque ces entiers sont de parité distincte, il suit que $2k \leq 2k'$, et donc $k \leq k'$. En échangeant k et k' , on prouve de même que $k' \leq k$, et donc $k = k'$.

On a ainsi montré l'implication $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset \Rightarrow A_k = A_{k'}$ qui permet de conclure que les A_k sont deux à deux disjoints.

Nous avons bien vérifié les trois conditions définissant une partition de \mathbb{U} , donc $\{A_k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ est une partition de \mathbb{U} .

7. (a) Les $n+1$ complexes $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}$ sont deux à deux distincts, et sont tous dans un des n ensembles A_0, \dots, A_{n-1} (étant donné que ces ensembles forment une partition de \mathbb{U}). Donc il existe¹ $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que A_k contienne au moins deux éléments z_p et z_q avec $p, q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ distincts, soit $\{z_p, z_q\} \subset A_k$.
- (b) Calculons :

$$\begin{aligned} \text{Arg}(z_{q-p}) &= \text{Arg}(e^{i\theta(q-p)}) = \text{Arg}\left(\frac{e^{i\theta q}}{e^{i\theta p}}\right) = \text{Arg}\left(\frac{z_q}{z_p}\right) \\ &\equiv \text{Arg}(z_q) - \text{Arg}(z_p) [2\pi] \equiv \psi - \varphi [2\pi]. \end{aligned}$$

Mais puisque z_p et z_q sont dans A_k , alors $\frac{2k\pi}{n} \leq \varphi < \frac{2(k+1)\pi}{n}$ et $\frac{2k\pi}{n} < \psi \leq \frac{2(k+1)\pi}{n}$, et donc $-\frac{2\pi}{n} \leq \psi - \varphi \leq \frac{2\pi}{n}$. Et puisque de plus $\psi - \varphi \geq 0$, on en déduit que

$$\text{Arg}(z_{q-p}) = \psi - \varphi \in \left]0, \frac{2\pi}{n}\right[.$$

¹On utilise ici ce qu'on appelle le *principe des tiroirs* que nous verrons lors du chapitre de dénombrement : si on range n chaussettes dans p tiroirs et que $n > p$, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

(c) Il s'agit de majorer $d(Z, z_{k(q-p)}) = |e^{i\alpha} - e^{k(\psi-\varphi)}|$. Par la question 1 :

$$|e^{i\alpha} - e^{k(\psi-\varphi)}| = 2 \left| \sin \left(\frac{\alpha - k(\psi - \varphi)}{2} \right) \right|.$$

Par définition de la partie entière :

$$k \leq \frac{\alpha}{\psi - \varphi} < k + 1 \quad \text{et donc} \quad 0 \leq \alpha - k(\psi - \varphi) < \psi - \varphi.$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{\alpha - k(\psi - \varphi)}{2} < \frac{\psi - \varphi}{2} < \frac{2\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par croissance de la fonction sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 \leq \sin \left(\frac{\alpha - k(\psi - \varphi)}{2} \right) < \sin \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right)$$

Et donc comme demandé :

$$d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2 \sin \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right).$$

(d) À l'aide de l'inégalité classique $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient :

$$d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2 \frac{\psi - \varphi}{2} \leq \psi - \varphi \leq \frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon.$$

Et donc nous avons bien prouvé l'existence d'un entier m tel que $d(Z, z_m) \leq \varepsilon$.

Nous avons ainsi montré qu'il existe des éléments de V aussi proche que l'on souhaite de n'importe quel nombre complexe de module 1. On dit que la partie V est *dense* dans \mathbb{U} .

8. Prouvons qu'aucune racine de l'unité n'est dans V , hormis $0 = z_0$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_n \in \mathbb{U}_p$. Alors :

$$z_n^p = 1, \quad \text{d'où} \quad \theta np \equiv 0[2\pi], \quad \text{et donc} \quad \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{np} \right].$$

Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{np}$, si bien que $\frac{\theta}{\pi} = \frac{2k}{np} \in \mathbb{Q}$, contredisant notre hypothèse. Donc V n'est pas égal à \mathbb{U} .

9. Soit $x \in [-1, 1]$, et soit $Z = x + i\sqrt{1-x^2}$, qui est un nombre complexe de module 1, donc dans \mathbb{U} . Soit également $\varepsilon > 0$ fixé.

Par ce qui précède, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$|Z - z_m| \leq \varepsilon, \quad \text{où} \quad z_m = e^{im\theta}.$$

Et alors :

$$|x - \cos(m\theta)| = |\operatorname{Re}(x - z_m)| \leq |x - z_m| \leq \varepsilon.$$

Si $m \in \mathbb{N}$, alors on a répondu à la question. Sinon, $-m \in \mathbb{N}$, et $\cos(m\theta) = \cos(-m\theta)$, donc il existe bien un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $|x - \cos(k\theta)| \leq \varepsilon$.

Ceci signifie que pour tout nombre x de $[-1, 1]$ il existe des $\cos(k\theta)$ aussi proches de x que l'on veut. Nous dirons bientôt que $\{\cos(k\theta), k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.