DM14

Correction du devoir maison

I - Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie

1. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, calculons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k(1-p)^{n-k} \boxed{= (1-p+pt)^n.}$$

   De même, si $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, pour tout $t \neq 1$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}t^k \boxed{= t\frac{1-t^n}{n(1-t)}}$$

   et $G_X(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

   Remarque. On notera au passage que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$:

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1$$

   car $([X=x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

2. Par le théorème de transfert :

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k) \boxed{= G_X(t).}$$

3. G_X étant une fonction polynômiale, elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant une première fois, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)t^{k-1}.$$

   En particulier :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \boxed{= G_X'(1).}$$

   En dérivant une seconde fois, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)t^{k-2}.$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) - \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = E(X^2) - E(X). \end{aligned}$$

   Avec la formule de Koenig-Huygens, on obtient :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 \\ &\boxed{= G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2.} \end{aligned}$$

4. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$ et pour tout réel t :

$$G_X^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1)P(X=k)t^{k-j} = \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!}P(X=k)t^{k-j}.$$

Pour $t=0$, la somme ci-dessus ne contient plus que le terme correspondant à $k=j$ (les autres sont nuls), d'où :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ G_X^{(j)}(0) = j! \times P(X=j).$$

Ainsi, la connaissance de G_X permet de retrouver la loi de X, puisque que

$$\boxed{\forall j \in [\![0,n]\!],\ P(X=j) = \frac{G_X^{(j)}(0)}{j!}.}$$

II - Une application

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note P_i (resp. F_i) l'événement « faire pile au i-ème lancer » (resp. « faire face au i-ème lancer »).

5. Pour la loi de X_2, son image est $X_2(\Omega) = \{0,1\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_2=0) &= P((P_1 \cap P_2) \sqcup (F_1 \cap F_2)) \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \qquad \text{(par indépendance)} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2=1) &= 1 - P(X_2=0) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{X_2 \sim \mathscr{B}(1/2),\ E(X_2) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X_2) = \frac{1}{4}.}$

Pour X_3, son image est $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$. De plus :

$$\begin{aligned} P(X_3=0) &= P((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)) \\ &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \qquad \text{(par indépendance)} \\ &\boxed{= \frac{1}{4},} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_3=2) &= P((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) \\ &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \qquad \text{(par indépendance)} \\ &\boxed{= \frac{1}{4},} \end{aligned}$$

et donc $P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) \boxed{= \frac{1}{2}.}$ Calculons alors l'espérance et la variance de X_3 :

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) \boxed{= 1,}$$
$$E(X_3^2) = 0^2 \times P(X_3 = 0) + 1^2 \times P(X_3 = 1) + 2^2 \times P(X_3 = 2) \boxed{= \frac{3}{2},}$$
$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 \boxed{= \frac{1}{2}.}$$

6. L'image $X_n(\Omega)$ de X_n est inclus dans $[\![0, n-1]\!]$ puisque pour toute issue $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega)$ est un entier naturel, nécessairement inférieur à $n-1$ par définition de X_n (on ne peut pas gagner plus de $n-1$ points en n lancers). Et réciproquement, tout entier k de $[\![0, n-1]\!]$ est dans l'image de X_n, il suffit par exemple d'obtenir une alternance de $k+1$ pile et face, puis que les $n-k$ derniers lancers donnent le même résultat. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.

   Puisque $[X_n = 0] = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$. on obtient par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) + P(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \qquad \text{(par indépendance)} \\ &\boxed{= \frac{1}{2^{n-1}}.} \end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned} P(X_n = n-1) &= P((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \ldots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \ldots)) \\ &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \ldots) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \ldots) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \qquad \text{(par indépendance)} \\ &\boxed{= \frac{1}{2^{n-1}}.} \end{aligned}$$

7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide du système complet d'événements $([X_n = i])_{0 \le i \le n-1}$:

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X_n = i) P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = k).$$

   Or $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$ si $i \neq k-1, k$ et $P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) = P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$\boxed{P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k-1).}$$

8. (a) Soit $n \geq 2$. Calculons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = k)t^k = P(X_{n+1} = 0) + \sum_{k=1}^{n} P(X_{n+1} = k)t^k \\
&= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1)\right) t^k \qquad \text{(questions précédentes)} \\
&= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(X_n = k-1)t^k \\
&= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)t^{k+1} \qquad \text{(changement de variable)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2}t\sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)t^k \qquad \text{(car } P(X_n = n) = 0\text{)} \\
&= \frac{1}{2}G_n(t) + \frac{t}{2}G_n(t) \boxed{= \frac{(1+t)}{2}G_n(t).}
\end{aligned}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par les questions précédentes, $(G_n(t))_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de premier terme $G_2(t) = \dfrac{1+t}{2}$ et de raison $\dfrac{1+t}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{G_n(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.}$$

(c) Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_n'(t) = (n-1) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \qquad \text{et} \qquad G_n''(t) = (n-1)(n-2) \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}$$

À l'aide du résultat obtenu à la question 3 :

$$E(X_n) = G_n'(1) \boxed{= \frac{n-1}{2}}$$

et :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= G_n''(1) + G_n'(1) - (G_n'(1))^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} \\
&= \frac{(n-1)((n-2) + 2 - (n-1))}{4} \boxed{= \frac{n-1}{4}.}
\end{aligned}$$