DM11

Devoir maison à rendre le 23/02/2026

Partie I : Théorème de Lagrange.

Soit $(G,*)$ un groupe fini, c'est-à-dire un ensemble fini muni d'une structure de groupe. Le cardinal de G, noté $|G|$ est alors appelé l'*ordre du groupe* G.

Le but de cette partie est de prouver le *théorème de Lagrange* : si H est un sous-groupe de G, alors l'ordre de H divise l'ordre de G.

Dans toute la suite de cette partie, H désigne un sous-groupe de G.

On définit une relation binaire $\sim$ sur G par : $\forall (g,g') \in G^2,\ g \sim g' \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H$.

1. Prouver que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
2. Soit $g \in G$. Montrer que la classe d'équivalence de g (pour la relation $\sim$) est $gH = \{gh,\ h \in H\}$.
3. Prouver que toutes les classes d'équivalence ont même cardinal que H.
4. En déduire le théorème de Lagrange.

Partie II : Ordre d'un élément.

Soit $(G,*)$ un groupe fini d'élément neutre e. Dans la suite, on fixe un élément $g \in G$.

5. Montrer que $\min\{k \in \mathbb{N}^* \mid g^k = e\}$ existe. On appelle *ordre de* g, et on note $o(g)$, cet entier.
6. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $g^k = e$ si, et seulement si, $o(g)$ divise k.
7. On rappelle que $\langle g \rangle = \{g^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G, appelé sous-groupe engendré par g.
   Montrer que $\langle g \rangle = \{g^k,\ k \in [\![0, o(g)-1]\!]\}$.
8. On note $p = o(g)$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_p & \to & \langle g \rangle \\ \zeta^k & \mapsto & g^k \end{array}$ est bien définie, c'est-à-dire que si $\zeta^k = \zeta^{k'}$, alors $g^k = g^{k'}$, puis que φ est un isomorphisme de $\mathbb{U}_p$ dans $\langle g \rangle$.
9. Montrer que $o(g)$ divise l'ordre de G. En déduire la valeur de $g^{|G|}$.

Partie III : Réciproque du théorème de Lagrange pour les groupes cycliques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et on rappelle que $\mathbb{U}_n = \langle \zeta \rangle$ est un groupe cyclique d'ordre n.

Le but de cette partie est de montrer que si $r \geq 2$ est un diviseur strict de n, alors $\mathbb{U}_n$ admet un unique sous-groupe d'ordre r.

10. On pose $d = \dfrac{n}{r}$. Montrer que $H = \langle \zeta^d \rangle$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ d'ordre r.
11. Soit H' un sous-groupe d'ordre r de $\mathbb{U}_n$. Notons $k \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $\zeta^k \in H'$.
    (a) Justifier l'existence d'un tel entier k, puis montrer que $H' = \langle \zeta^k \rangle$.
    (b) En déduire que d divise k, puis que $H' = H$. Conclure.
12. Quel est l'unique sous-groupe d'ordre 4 de $\mathbb{U}_{32}$?

Partie IV : Groupes finis d'ordre premier et d'ordre 4.

13. Soit p un nombre premier. Montrer que si G est un groupe fini d'ordre p, alors G est isomorphe à $\mathbb{U}_p$.

14. Dans cette question, on cherche à déterminer tous les groupes finis d'ordre 4 à isomorphisme près.

    (a) Dresser les tables de Cayley des groupes $(\mathbb{U}_4, \times)$ et $(\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2, \times)$.

    (b) Soit G un groupe d'ordre 4. En discutant sur l'ordre de ses éléments, montrer que G est isomorphe à l'un des groupes $(\mathbb{U}_4, \times)$ ou $(\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2, \times)$
