

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Méthode de Newton)

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. La fonction f est continue sur $[a, b]$, strictement décroissante sur cet intervalle (car $f' < 0$ sur $[a, b]$), et satisfait $0 \in]f(b), f(a)[$. Par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $]a, b[$ que l'on note α .

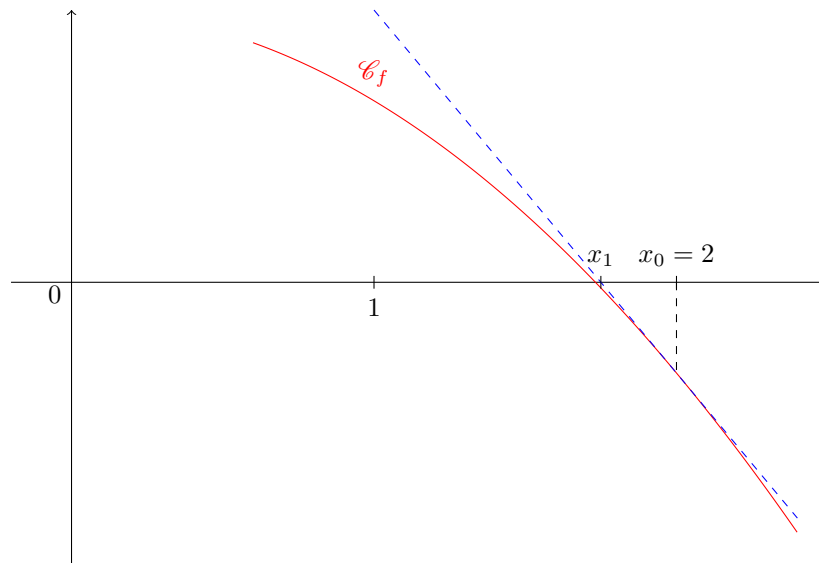
2. Rappelons que la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse x_0 a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Cherchons l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et cette tangente en résolvant :

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Puisque $f'(x_0) \neq 0$, cette équation admet pour unique solution $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

3. Exemple.



Partie II. Étude de la fonction g .

4. La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ comme différence et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Et pour tout $x \in [a, b]$:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

En particulier, $g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et $g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$.

5. (a) Les fonctions $|f|$ et $|f''|$ sont continues sur le **segment** $[a, b]$ en tant que composée de fonctions continues. Par le théorème des bornes atteintes, elles sont bornées et atteignent leur bornes : il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f'(c)| < |f'(x)| \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq |f''(d)|$$

avec $|f'(c)| > 0$ car f' est strictement négative sur $[a, b]$. Posons $m = |f'(c)|$ et $M = 1 + |f''(d)|$. Ces réels sont bien strictement positifs et satisfont pour tout $x \in [a, b]$:

$$\boxed{|f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M.}$$

- (b) La fonction f étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, f' est continue sur le **segment** $[a, b]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes : il existe $\beta \in [a, b]$ tel que :

$$\forall t \in [a, b], \quad |f'(t)| \leq |f'(\beta)|.$$

Posons $L = |f'(\beta)| > 0$. Par l'inégalité des accroissements finis, f est L -lipschitzienne sur $[a, b]$. D'où, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\boxed{|f(t)| = |f(t) - f(\alpha)| \leq L|t - \alpha|.}$$

- (c) Soit $x \in [a, b]$ fixé. Remarquons que si $x = \alpha$, l'inégalité demandée est trivialement vérifiée. Supposons dans la suite $x \neq \alpha$. Pour tout t strictement compris entre x et α :

$$|g'(t)| = \left| \frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} \right| \leq \frac{|f(t)||f''(t)|}{f'(t)^2} \leq \frac{M}{m^2}|f(t)| \leq \frac{M}{m^2}L|t - \alpha| \leq \frac{M}{m^2}L|x - \alpha|$$

à l'aide des inégalités obtenues aux questions précédentes.

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à g entre α et x (en notant bien que les hypothèses associées à ce résultat ont toutes été vérifiées précédemment) :

$$\boxed{|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha| \times |x - \alpha| \frac{ML}{m^2}(x - \alpha)^2.}$$

- (d) Il suffit de poser $\boxed{K = \frac{ML}{m^2} > 0.}$

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. (a) La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Puisque f' est strictement négative, f est strictement décroissante sur $[a, b]$. Comme de plus $f(\alpha) = 0$, $f(x) > 0$ sur $[a, \alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $] \alpha, b]$. Comme on suppose ici f'' strictement positive, on obtient $g'(x) > 0$ sur $[a, \alpha[$ et $g'(x) < 0$ sur $] \alpha, b]$. Ainsi, g est strictement croissante sur $[a, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, b]$.

- (b) Puisque g est continue et strictement croissante sur $[a, \alpha]$:

$$g([a, \alpha]) = [g(a), g(\alpha)] = [g(a), \alpha].$$

Or, $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$ car $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$. Ainsi, $g([a, \alpha]) \subset [a, \alpha]$. L'intervalle $[a, \alpha]$ est stable par g et $x_0 \in [a, \alpha]$. On montre alors par récurrence (à rédiger si demandé) que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x_n \text{ est bien définie et appartient à l'intervalle } [a, \alpha].}$ Elle est en particulier majorée par α .

Montrons par récurrence la propriété « $x_n \leq x_{n+1}$ » que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I On a montré précédemment que $x_1 = g(a) \geq a = x_0$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $x_n < x_{n+1}$.

Comme $(x_n, x_{n+1}) \in [a, \alpha]^2$ et que g est croissante sur $[a, \alpha]$, il vient $g(x_n) \leq g(x_{n+1})$, soit encore $x_{n+1} < x_{n+2}$. Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, $x_n < x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (c) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α : elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Alors ℓ appartient à $[a, \alpha]$ (par passage à la limite dans les inégalités). Et puisque g est continue sur $[a, \alpha]$, c'est nécessairement un point fixe de g . Or :

$$g(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} = \ell \Leftrightarrow f(\ell) = 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{quest. 1}} \ell = \alpha.$$

Ainsi, la suite (x_n) converge vers $\ell = \alpha$.

7. (a) Puisque $\alpha \in]a, b[$, il existe $\eta > 0$ tel que $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$. Le réel $h = \min\left(\eta, \frac{1}{K+1}\right)$

vérifie alors bien $h > 0$, $[\alpha - h, \alpha + h] \subset [a, b]$ et $h \leq \frac{1}{K+1} < \frac{1}{K}$.

- (b) D'après la question 5.,

$$\forall x \in [a, b], \quad |g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2.$$

Pour tout $x \in I = [\alpha - h, \alpha + h] \subset [a, b]$:

$$|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2 \leq Kh^2 \leq h.$$

Ainsi, $g(x)$ appartient à $[\alpha - h, \alpha + h] = I$, et l'intervalle I est stable par g .

Si $x_0 \in I$, on montre par récurrence (que je vous laisse rédiger) que x_n existe et appartient à I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

I Puisque $\frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^2 = \frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|) = |x_0 - \alpha|$, la propriété est vraie au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$.

Puisque I est stable par g , $x_{n+1} = g(x_n)$ appartient à $I \subset [a, b]$, d'où :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &= |g(x_n) - g(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|^2 \stackrel{HR}{\leq} K \left[\frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^{2^n} \right]^2 \\ &\leq K \times \frac{1}{K^2} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n \times 2} = \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n} .}$$

- (d) Puisque $|x_0 - \alpha| \leq h$ (car $x_0 \in I$), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K} (Kh)^{2^n} .$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (Kh)^{2^n} = 0$ car $Kh \in]-1, 1[$, par le théorème des gendarmes, la suite

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

8. (a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[1, 3]$, et vérifie $f(1) = 2 > 0$, $f(3) = -6 < 0$ et $f'(x) = -2x < 0$ pour tout $x \in [1, 3]$. On est bien dans le cadre d'application des résultats précédents.

L'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1, 3]$ est $\alpha = \sqrt{3}$. De plus, pour tout $x \in [1, 3]$:

$$|f'(x)| = 2x \in [2, 6] \quad \text{et} \quad |f''(x)| = 2.$$

Ainsi, $m = 2$, $L = 6$ et $M = 2$ conviennent. Posons $K = \frac{ML}{m^2} = \frac{2 \times 6}{2^2} = 3$.

On remarque que $1.7^2 = 2.89$ et $2^2 = 4$. Ainsi, $1.7^2 < 3 < 4$. Comme la racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , on dispose de l'encadrement $1.7 < \sqrt{3} < 2$. Le réel $h = 0.3$ vérifie bien $Kh = 3 \times 0.3 = 0.9 < 1$ et que $[\sqrt{3} - h, \sqrt{3} + h] \subset [1, 3]$.

- (b) Par les questions précédentes, il suffit de vérifier si x_0 appartient bien à $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, soit en remplaçant par les valeurs numériques, si 2 appartient à $[\sqrt{3} - 0.3, \sqrt{3} + 0.3]$. Mais avec les inégalités obtenues à la question précédente :

$$\sqrt{3} - 0.3 \leq 2 - 0.3 \leq 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{3} + 0.3 \geq 1.7 + 0.3 = 2.$$

Donc 2 appartient bien à I . Par la question 7.(b), (x_n) est bien définie et à valeurs dans I .

- (c) Par la question 7.(c), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3} (3 \times |2 - \sqrt{3}|)^{2^n} \leq \frac{1}{3} (3 \times 0.3)^{2^n} = \frac{1}{3} (0.9)^{2^n}.$$

- (d) Afin d'obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer x_{N_1} pour $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3} (0.9)^{2^{N_1}} \leq 10^{-100}$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (0.9)^{2^{N_1}} \leq 10^{-100} &\iff (0.9)^{2^{N_1}} \leq 3 \times 10^{-100} \iff 2^{N_1} \ln(0.9) \leq \ln(3 \times 10^{-100}) \\ &\iff 2^{N_1} \geq \frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)} \quad \text{car} \quad \ln(0.9) < 0 \\ &\iff N_1 \ln(2) \geq \ln\left(\frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right) \iff N_1 \geq \frac{\ln\left(\frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Ainsi, en effectuant $N_1 = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)} \right\rceil + 1 = 12$ itérations seulement, on obtient une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près.

- (e) Par la méthode de dichotomie sur le segment $[1, 3]$, on construit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers $\sqrt{3}$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - \sqrt{3}| \leq \frac{3-1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ (on a une inégalité analogue pour (b_n)). Afin de calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de déterminer a_{N_2} pour $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N_2-1}} \leq 10^{-100}$. Résolvons cette inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{N_2-1}} \leq 10^{-100} &\iff -(N_2 - 1) \ln(2) \leq -100 \ln(10) \iff (N_2 - 1) \geq \frac{100 \ln(10)}{\ln(2)} \\ &\iff N_2 \geq \frac{100 \ln(10)}{\ln(2)} + 1 \end{aligned}$$

En effectuant $N_2 = \left\lceil \frac{100 \ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rceil + 1 = 334$ itérations, on obtient une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près. La méthode de Newton est donc bien plus efficace que la méthode de dichotomie pour approximer $\sqrt{3}$.