DM 1

Correction du Devoir Maison

Exercice 1

1. L'équation (E_1) est bien définie si, et seulement si, la variable x est distincte de 3.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$. Procédons par équivalence pour (E_1) :

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \frac{5}{3-x} - 3 + \frac{x+4}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{15 - 9(3-x) + (x+4)(3-x)}{3(3-x)} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{15 - 27 + 9x + 3x - x^2 + 12 - 4x}{3(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+8x}{3(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(8-x)}{3(3-x)} = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 8.\end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\{0, 8\}$.

   L'équation (E_2) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas, étant donné la présence de valeurs absolues.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x-2$		$-$	0		$+$		
$x+5$			$-$		0	$+$	

   Par disjonction de cas :

   - pour $x \in]-\infty, -2]$:
   $$(E_2) \Leftrightarrow -(x+2) = (5-x) + 1 \Leftrightarrow -x + x = 2 + 5 + 1 \Leftrightarrow 0 = 8.$$
   Cette dernière égalité étant fausse, il n'y a pas de solution dans ce cas.
   - pour $x \in]-2, 5]$:
   $$(E_2) \Leftrightarrow (x+2) = (5-x) + 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$
   Puisque $2 \in [-2, 5]$, on conserve cette solution.
   - pour $x \in]5, +\infty[$:
   $$(E_2) \Leftrightarrow (x+2) = -(5-x) + 1 \Leftrightarrow x - x = -2 - 5 + 1 \Leftrightarrow 0 = -6.$$
   Cette dernière équation étant fausse, il n'y a pas de solution dans ce cas.

   Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{2\}$.

2. L'inéquation (I_1) est définie si, et seulement si, $x^2 - 4 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$, soit $x \neq \pm 2$. Pour $x \in \mathbb{R}$ différent de ± 2, on résout par équivalence :

$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)-(x-2)}{(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} < 0.$$

   Effectuons un tableau de signe pour trouver l'ensemble des solutions de cette inéquation.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$			$-$		0		$+$		
$x+2$		$-$	0			$+$			
$x-2$				$-$			0	$+$	
$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I_1) est $]-\infty,-2[\cup]1,2[$.

Pour (I_2), on procède par disjonction de cas étant donné la présence d'une valeur absolue :

- pour $x \in]-\infty, 3]$:

$$(I_2) \Leftrightarrow -(x-3) \geq 4x+1 \Leftrightarrow -x-4x \geq 1-3 \Leftrightarrow -5x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{5}.$$

  Comme $x \in]-\infty, 3]$, l'ensemble des solutions dans ce cas est $\left]-\infty, \frac{2}{5}\right]$.

- pour $x \in]3,+\infty[$:

$$(I_2) \Leftrightarrow (x-3) \geq 4x+1 \Leftrightarrow -3x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}.$$

  Pour tout $x \in]3,+\infty[$, la condition $x \leq -\frac{4}{3}$ est impossible. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_2) est $\left]-\infty, \frac{2}{5}\right]$.

Exercice 2

Partie A : Une première somme faisant apparaître un télescopage.

1. Par la formule de Pascal, pour tout entier k compris entre $p+1$ et n :

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}, \quad \text{qui se récrit} \quad \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

   D'où en substituant :

$$S_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p} \boxed{= 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right]}.$$

2. Par télescopage :

$$\sum_{k=p+1}^{n} \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right] = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - 1.$$

   Ainsi :

$$S_{p,n} = 1 + \left[\binom{n+1}{p+1} - 1\right] \boxed{= \binom{n+1}{p+1}}.$$

Partie B : Une expression du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.

3. (a) Par symétrie des coefficients binomiaux :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

   D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}.$$

   (b) Par application de la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad \text{et} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.}$$

   Le coefficient de degré n de f_n est $\boxed{\binom{2n}{n}}$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant le produit, on obtient :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{n} a_k b_\ell x^{k+\ell}\right).$$

Le changement d'indice $i = k + \ell$ dans la somme intérieure donne :

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n+k} a_k b_{i-k} x^{i}\right).}$$

(b) Il s'agit d'échanger les symboles de sommation dans la somme double obtenue à la question précédente. La somme en jeu est une somme de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i}\right).$$

Comme suggéré, rangeons les termes de la somme double dans un tableau à $n+1$ lignes (l'indice k décrivant l'intervalle entier $[\![0, n]\!]$) et $2n+1$ colonnes (puisque les valeurs atteintes par l'indice i sont dans l'intervalle entier $[\![0, 2n]\!]$) :

	$i=0$		$i=k$		$i=n$		$i=k+n$		$i=2n$
$k=0$	$u_{0,0}$	$\cdots$	$u_{0,k}$	$\cdots$	$u_{0,n}$				
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$			
k			$u_{k,k}$	$\cdots$	$u_{k,n}$	$\cdots$	$u_{k,k+n}$		
$\vdots$				$\ddots$				$\ddots$	
$k=n$					$u_{n,n}$	$\cdots$	$u_{n,k+n}$	$\cdots$	$u_{n,n}$

Au vu du tableau ci-dessus :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i} u_{k,i}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=i-n}^{n} u_{k,i}\right).$$

Par ailleurs, on remarque que :

$$\max(i-n, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n \\ i-n & \text{si } i > n+1 \end{cases} \quad ; \quad \min(i, n) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq n \\ n & \text{si } i > n+1 \end{cases}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i}\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(i,n)} u_{k,i}\right).$$

Le résultat obtenu appliqué au produit $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell\right)$ conduit à :

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} a_k b_{i-k}\right) x^i.}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule précédente :

$$f_n(x) = g_n(x) \times g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} \binom{n}{k}\binom{n}{i-k}\right) x^i.$$

6. D'après la question 3.(b), le coefficient de degré n de f_n est égal à $\binom{2n}{n}$. Or la question précédente entraîne que le coefficient de degré n de f_n est égal à :

$$\sum_{k=\max(n-n,0)}^{\min(n,n)} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

compte-tenu de la question 3.(a). D'où par unicité de la suite des coefficients de f :

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.}$$