Chapitre 30b

Déterminants

Compétences attendues.

- ✓ Calculer le déterminant d'une matrice par multilinéarité, par opérations élémentaires ou développement par rapport à une ligne ou une colonne.
- ✓ Calculer le déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme.
- ✓ Utiliser un calcul de déterminant pour caractériser une base ou une propriété d'inversibilité.
- ✓ Préciser le rang d'une matrice par les déterminants extraits.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

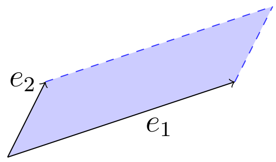
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

Motivations géométriques

Cette partie a pour objectif de motiver géométriquement l'introduction du déterminant. Le but est de se forger une intuition, quitte à faire des concessions sur la rigueur, et nous allons donc y parler d'aire et d'orientation sans définir du tout ce que nous entendons par là.

La formalisation de la notion intuitive d'aire dans le plan n'est pas triviale, et nous ne considérerons dans la suite que des aires de parallélogrammes. Le point de départ est la donnée d'une « unité d'aire orientée » du plan, c'est-à-dire le choix arbitraire d'un parallélogramme orienté, ou en d'autres termes d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ du plan.



À partir de cette brique élémentaire, nous pouvons donner une aire à n'importe quel parallélogramme du plan. Nous noterons $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ l'aire orientée du parallélogramme engendré par une famille (x_1, x_2) de vecteurs dans le plan. L'indice $\mathscr{B}$ indique que ces aires orientés sont calculées relativement à l'unité d'aire orientée que $\mathscr{B}$ représente. Quant à l'orientation, elle signifie qu'on comptera cette aire positivement si (x_1, x_2) a même orientation[1] que (e_1, e_2), négativement sinon.

On peut constater géométriquement les propriétés suivantes.

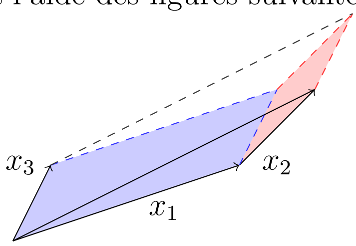
Propriété 1

- (x_1, x_2) est une base du plan si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2) \neq 0$.

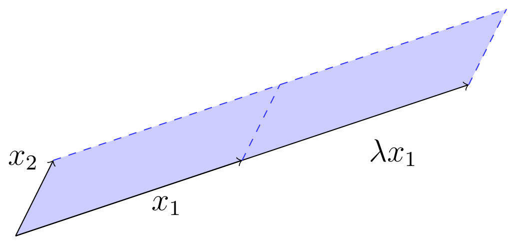
  En d'autres termes, la colinéarité de deux vecteurs est caractérisée par le caractère aplati du parallélogramme qu'ils engendrent.

- $\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2) = 1$ et $\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) = -1$.
- Le signe de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ est changé lorsqu'on permute deux vecteurs.
- L'application $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Ces différents points se comprennent bien géométriquement, sauf peut-être le dernier. On pourra s'en convaincre à l'aide des figures suivantes.



$\det_{\mathscr{B}}(x_1 + x_2, x_3) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_3) + \det_{\mathscr{B}}(x_2, x_3)$.



$\det_{\mathscr{B}}(\lambda x_1, x_2) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$.

À l'aide de ces propriétés de calculs, constatons que pour $x_1 = ae_1 + be_2$ et $x_2 = ce_1 + de_2$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2) &= \det_{\mathscr{B}}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = a \det_{\mathscr{B}}(e_1, ce_1 + de_2) + b \det_{\mathscr{B}}(e_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_1)}_{=0} + ad \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2)}_{=1} + bc \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1)}_{=-1} + bd \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_2)}_{=0} \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

[1]C'est-à-dire si l'angle (x_1, x_2) a une mesure principale (dans $]-\pi, \pi]$) de même signe que celle de (e_1, e_2).

On retrouve ici la formule du déterminant de $M_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$. Nous verrons dans la suite que ce n'est pas un hasard.
Nous généralisons dans ce chapitre ces résultats en dimension finie quelconque.

1 Formes multilinéaires alternées

Dans toute la suite de ce chapitre, n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{K}$ désignera indifféremment les corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

Pour aller plus loin.

Plus généralement, les résultats qui suivent restent valables sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, c'est-à-dire dans lesquels $1 + 1 \neq 0$ (ce qui n'est par exemple pas le cas dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

1.1 Applications multilinéaires

Définition.

Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$.
On dit que f est une application *multilinéaire* ou *n-linéaire* sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$ fixé, l'application :

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}}\text{ position}}}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

est linéaire de E_i dans F. Autrement dit, si pour tous $(x, y) \in E_i^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}}\text{ position}}}{\lambda x + y}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}}\text{ position}}}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}}\text{ position}}}{y}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme n-linéaire* sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Exemples.

- Le produit scalaire du plan est une forme 2-linéaire (on dira plutôt *bilinéaires* dans ce cas).
- Dans $\mathbb{R}[X]$, l'application $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P_1 P_2 \dots P_n$ est n-linéaire.
- Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 1. Montrer que l'application $\det : ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^2$.

Mise en garde.

Une application multilinéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ n'est en général pas linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Propriété 2

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application multilinéaire, et soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. S'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0_{E_i}$, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0_F$.

Propriété 3

L'ensemble $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n, F)$ des applications n-linéaires sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ à valeurs dans F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1.2 Formes alternées, formes antisymétriques

Définition.

Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. On dit que φ est *alternée* si pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $1 \leq i < j \leq n$:

$$x_i = x_j \quad \Rightarrow \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Autrement dit, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si deux des vecteurs sont égaux.

Exemples.

- Le produit scalaire dans le plan n'est pas alterné car $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| \neq 0$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.
- L'application det définie plus tôt sur $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ est alternée car $\det((a, b), (a, b)) = ab - ab = 0$.

Propriété 4

Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Définition.

Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. On dit que φ est *antisymétrique* si pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $1 \leq i < j \leq n$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Autrement dit, on change le signe de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en transposant deux vecteurs.

Propriété 5

Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire antisymétrique. Alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Propriété 6

Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. Alors φ est antisymétrique si, et seulement si, φ est alternée.

1.3 Formes n-linéaires alternées en dimension n

Théorème 7 (Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n)

Soit E un espace vectoriel de **dimension** n sur $\mathbb{K}$, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

(1) L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

(2) Il existe une unique forme n-linéaire alternée φ sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

(3) Si ψ est une forme n-linéaire alternée sur E, alors $\psi = \lambda\varphi$ où $\lambda = \psi(e_1, \ldots, e_n)$.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit toujours E un espace vectoriel de **dimension** n sur $\mathbb{K}$, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

2.1 Définition

Définition.

On appelle *déterminant dans la base* $\mathscr{B}$, et on note $\det_{\mathscr{B}}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Théorème 8 (Expression du déterminant dans une base)

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = M_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

Notation.

On utilisera la notation suivante, introduite par le mathématicien britannique Arthur Cayley (1821 - 1895) :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Cas particulier des déterminants en dimension 2 et 3.

- Si $n=2$, alors en notant que $\mathfrak{S}_2 = \left\{\mathrm{id}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\right\}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

- Si $n=3$, alors en notant que $\mathfrak{S}_3 = \left\{\mathrm{id}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\right\}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}}_{\mathrm{id}} + \underbrace{a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}}_{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}} + \underbrace{a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}}_{\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}} - \underbrace{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}}_{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}} - \underbrace{a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}}_{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}} - \underbrace{a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}}_{\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}}.$$

Autrement dit, « diagonales descendantes moins diagonales montantes » (*règle de Sarrus*).

Interprétation géométrique. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$, $\det_{\mathscr{B}}(x_1,x_2)$ est l'aire orientée du parallélogramme formé par les vecteurs x_1 et x_2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, $\det_{\mathscr{B}}(x_1,x_2,x_3)$ est le volume orienté du parallélépipède formé par les vecteurs x_1, x_2 et x_3.

2.2 Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Propriété 9 (Formule de changement de base)

Soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E. Pour toute famille $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E :

$$\det_{\mathscr{B}'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(e_1,\dots,e_n)\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n).$$

Corollaire 10 (Caractérisation d'une base par le déterminant)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$(x_1,\dots,x_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) \neq 0.$$

Exercice 2. Montrer que $((1,2,0),(2,0,1),(0,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

3.1 Définition et exemples

Propriété 11

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Pour toute base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E, il existe un unique scalaire λ tel que :

$$\det_{\mathscr{B}}(f(x_1),\dots,f(x_n)) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$$

pour toute famille $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E.
De plus, $\lambda = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ et λ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ de l'espace E choisie.

Définition.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

On appelle *déterminant de* f, et on note $\det(f)$, le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ où $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E.

Pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E :

$$\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f)\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Interprétation géométrique. Un endomorphisme f agit donc sur les aires ou volumes orientés, ou leur analogue en dimension n, comme une homothétie de rapport $\det(f)$.

Exercice 3. Calculer le déterminant des endomorphismes de E suivants :

- une homothétie vectorielle $\lambda \cdot \mathrm{id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{K}$;
- un projecteur p sur un sous-espace F parallèlement à G, où $E = F \oplus G$;
- une symétrie s par rapport à un sous-espace F dans la direction de G, où $E = F \oplus G$.

3.2 Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Propriété 12 (Déterminant d'une composée)

Si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n, alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g).$$

Propriété 13 (Caractérisation des automorphismes par le déterminant)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors :

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \det(f) \neq 0.$$

Et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

Conséquence. L'application déterminant $f \mapsto \det(f)$ est un morphisme de groupes de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$. Son noyau est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé le *groupe spécial linéaire de* E et noté $\mathrm{SL}(E)$. Ainsi :

$$\mathrm{SL}(E) = \{f \in \mathrm{GL}(E) \mid \det(f) = 1\}.$$

Dit autrement, c'est l'ensemble des automorphismes de E qui préservent le volume orienté.

4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 Définition

Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée**. On appelle *déterminant de* A, et on note $\det(A)$, le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

Notation.

On notera comme précédemment :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Propriété 14

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1(A), \dots, C_n(A) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ses vecteurs colonnes. Alors :

- $\det(A) = \det_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(C_1(A), \dots, C_n(A))$ où $\mathscr{B}_{\text{can}}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- l'application $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A.

Corollaire 15

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

(1) $\det(I_n) = 1$;

(2) si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$;

(3) si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$;

(4) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Danger.

Attention, le déterminant n'est pas linéaire : on n'a pas en général $\det(\lambda A) \cancel{=} \lambda \det(A)$ ou encore $\det(A+B) \cancel{=} \det(A) + \det(B)$.

Propriété 16

Soit E est un espace vectoriel de dimension n de base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

(1) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det(M_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)).$$

(2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. Alors :

$$\det(f) = \det(M_{\mathscr{B}}(f)).$$

4.2 Propriétés du déterminant d'une matrice

Propriété 17 (Déterminant d'un produit)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

Théorème 18 (Caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n. Alors :

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Remarque. Comme dans le cas des endomorphismes, on définit le *groupe spécial linéaire d'ordre n*, noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, par :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Corollaire 19

Deux matrices semblables ont même déterminant.

Mise en garde.

Nous obtenons ici un nouvel invariant de similitude, en plus du rang et de la trace. Attention cependant, la réciproque est fausse : deux matrices ayant même rang, même trace et même déterminant ne sont pas forcément semblables, comme on peut le constater avec les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 20

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^\top)$.

Corollaire 21

L'application $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une forme n-linéaire alternée par rapport aux lignes de A.

5 Calculs de déterminants

5.1 Déterminant d'une matrice triangulaire

Propriété 22 (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Soit $T = (t_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure, inférieure ou diagonale). Alors :

$$\det(T) = t_{1,1}t_{2,2}\dots t_{n,n}.$$

Propriété 23 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)

Soient $A \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

Corollaire 24

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0_{k_2,k_1} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0_{k_p,k_1} & \cdots & 0_{k_p,k_{p-1}} & A_p \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in \mathscr{M}_{k_1}(\mathbb{K}), \dots, A_p \in \mathscr{M}_{k_p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(A) = \det(A_1)\cdots\det(A_p).$$

Exemple. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 19 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \times 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \times 5 \times 18 = -240.$

5.2 Opérations élémentaires

Propriété 25 (Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires)

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ ne modifient pas les déterminants.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_j \leftarrow \lambda C_j$ multiplient les déterminants par λ.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_j \leftrightarrow C_i$ multiplient les déterminants par -1.

Méthode. Calcul du déterminant d'une matrice par l'algorithme du pivot de Gauss.
Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra :

- *appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener par opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes au calcul d'un déterminant d'une matrice triangulaire. On pensera pour cela :*
  - *à changer le signe lorsqu'on fait un échange de lignes ou de colonnes ;*
  - *à compenser en divisant à l'extérieur par λ lorsqu'on multiplie une ligne ou une colonne par λ.*
- *une fois ramené à une matrice triangulaire, on calcule son déterminant en effectuant le produit des coefficients diagonaux.*

Exercice 4. Calculer les déterminants de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

5.3 Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on appelle :

- *mineur d'indice* (i, j) de A, et on note $\Delta_{i,j}(A)$, le déterminant de la matrice extraite de A obtenue par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne ;
- *cofacteur d'indice* (i, j) de A le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.

Propriété 26

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on peut calculer $\det(A)$:

- par développement suivant la j-ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

- par développement suivant la i-ème ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Exercice 5. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Mise en garde.

Ne surtout pas oublier les $(-1)^{i+j}$ dans les cofacteurs. Un bon moyen de ne pas se tromper est de se rappeler que le coefficient en haut à gauche (le coefficient $(1, 1)$) correspond à un $+1$, et que deux coefficients adjacents sont de signes opposés :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Complexité de l'algorithme de calcul du déterminant.
Ces formules ramènent le calcul d'un déterminant d'ordre n à celui de n déterminants d'ordre $n-1$. Si u_n est le nombre d'opérations pour calculer un déterminant d'ordre n, alors :

$$u_n = n u_{n-1} + n \geq n u_{n-1}.$$

D'où $u_n \geq \dfrac{n!}{2} u_2 = \dfrac{3}{2} n!$. Ainsi, cet algorithme est rapidement explosif en nombre d'opérations, ce qui le rend totalement inefficient en pratique (sauf éventuellement pour $n = 3$). Il est à comparer avec le calcul de déterminant par l'algorithme du pivot de Gauss, qui nécessite quant à lui $O(n^3)$ opérations.

Quelques chiffres. Comparons les vitesses de calculs du déterminant d'une modeste matrice 25×25 à l'aide d'un ordinateur téraflops, c'est-à-dire capable d'effectuer 10^{12} opérations en virgule flottante par seconde :

- par développement récursif par rapport aux lignes ou aux colonnes, cela représente $25! \approx 1,5 \times 10^{25}$ opérations, et il faudrait au moins 500 000 ans de fonctionnement ininterrompu pour effectuer ce calcul ;
- par l'algorithme du pivot de Gauss, l'ordre est de 10^5 opérations, que le même ordinateur effectuera en $0,1$ millionièmes de secondes.

Méthode. Calcul pratique du déterminant d'une matrice.
En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice, on pourra combiner opérations élémentaires, afin de faire apparaître des zéros dans la matrice, et développement par rapport à une ligne ou une colonne. En effet, le développement par rapport à une ligne ou une colonne devient pertinent si la matrice contient beaucoup de zéros.

5.4 Exemples de calculs de déterminants

Déterminant de Vandermonde

Propriété 27 (Déterminant de Vandermonde)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des scalaires. Alors :

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Remarque. Une matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

Déterminant d'une matrice tridiagonale

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a+b & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}.$$

À retenir. Le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice.
La formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i},$$

bien qu'inexploitable en général pour le calcul des déterminants, est utile sur le plan qualitatif car elle montre que $\det(A)$ s'obtient par sommes et produits des coefficients de A. Un déterminant est donc continu, ou de classe $\mathscr{C}^k$, etc, lorsque les coefficients de A le sont.

6 Applications

6.1 Comatrice

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice de* A, et on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A, c'est-à-dire définie par $[\mathrm{Com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -8 & -6 \\ 15 & 4 & 3 \\ -25 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Théorème 28

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top \times A = \det(A) I_n.$$

Corollaire 29

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^\top.$$

Remarque. Aussi jolie soit cette formule, elle a surtout un intérêt théorique, puisque la complexité des calculs explose rapidement.

Exemples. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et on retrouve une vieille connaissance :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si $n = 3$, le calcul de la comatrice nécessite le calcul de 9 déterminants 2×2 et du déterminant de A. Il est alors plus avantageux (en calculs et pour minimiser les erreurs de calcul) d'inverser A par méthode du pivot de Gauss.

6.2 Rang d'une matrice

Définition.

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un entier r tel que $1 \leq r \leq \min(n,p)$.
On appelle *déterminant d'ordre r extrait de A* tout déterminant obtenu par suppression de $n-r$ lignes et $p-r$ colonnes dans la matrice A.

Exemple. Les mineurs d'une matrice carrée d'ordre n constituent des déterminants d'ordre $n-1$ extraits de cette matrice.

Propriété 30 (Expression du rang à l'aide des déterminants extraits)

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un entier r tel que $1 \leq r \leq \min(n,p)$. Alors :

(1) $\mathrm{rg}(A) \geq r$ si, et seulement si, il existe un déterminant non nul d'ordre r extrait de A ;

(2) $\mathrm{rg}(A) = r$ si, et seulement si :

- il existe un déterminant non nul d'ordre r extrait de A ;
- tout déterminant d'ordre $\geq r+1$ extrait de A est nul.