Chapitre 30

Fonctions convexes

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une fonction est convexe ou concave.
- ✓ Connaître et appliquer à bon escient les inégalités des pentes.
- ✓ Obtenir des inégalités de convexité à l'aide des positions relatives courbe/tangente et courbe/corde.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Fonctions convexes

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Cordes, sécantes

Propriété 1

Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) avec $x_A \neq x_B$. Notons (AB) la droite passant par A et B, et $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B. Alors :

$$\begin{aligned}(AB) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A\right\} \\ &= \{((1-\lambda)x_A + \lambda x_B, (1-\lambda)y_A + \lambda y_B)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

et

$$[A, B] = \{((1-\lambda)x_A + \lambda x_B, (1-\lambda)y_A + \lambda y_B),\ \lambda \in [0, 1]\}\,.$$

Remarque. En particulier pour tous réels $a < b$, x appartient à $[a, b]$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = (1-\lambda)a + \lambda b$, et alors $\lambda = \dfrac{x-a}{b-a}$, rapport de la distance entre a et x avec celle entre a et b.

Définition.

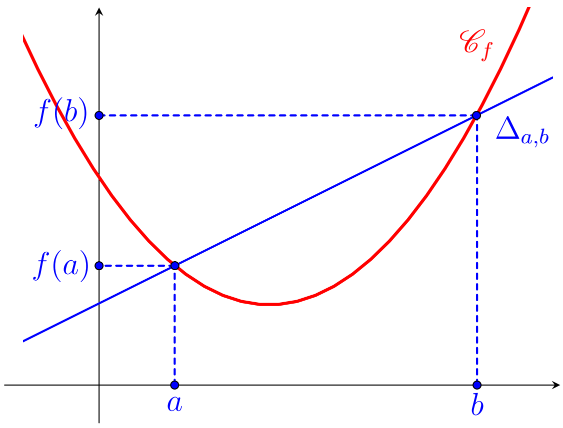
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soient $a, b \in I$ deux points distincts.

- On appelle *sécante de f passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$* la droite notée $\Delta_{a,b}$ passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ du plan, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\begin{aligned}\Delta_{a,b} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right\} \\ &= \{((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b))\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

- On appelle *corde de f entre a et b* le segment d'extrémités $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\{((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)),\ \lambda \in [0, 1]\}.$$



Astuce.

L'équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, on remplace la dérivée $f'(a)$ par le taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui donne :

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

1.2 Définition

Définition.

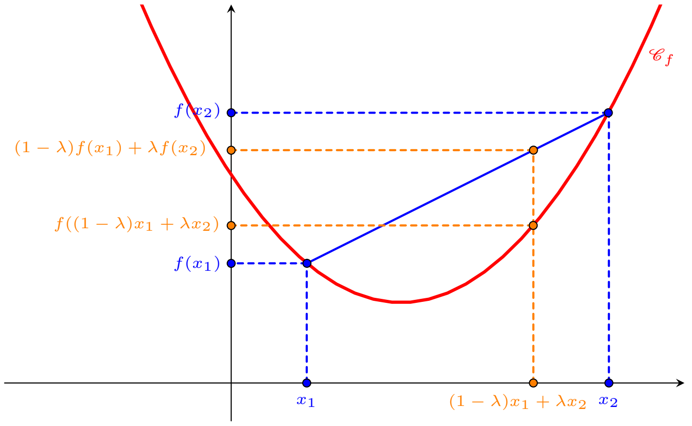
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe sur* I si :

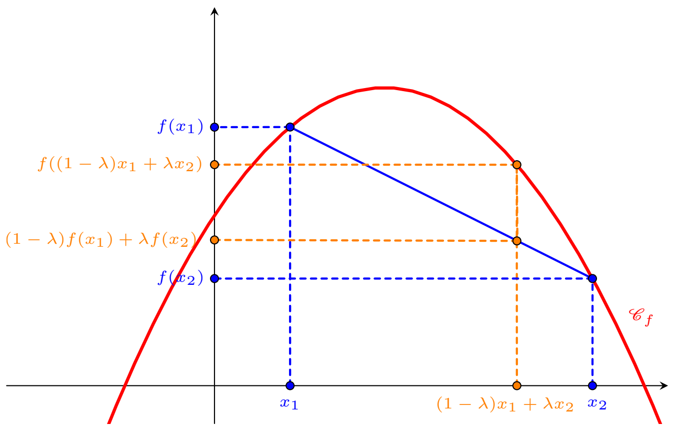
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

On dit que f est *concave sur* I si $-f$ est convexe sur I, c'est-à-dire si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Interprétation graphique.





f est **convexe sur** I si, et seulement si, sa courbe $\mathscr{C}_f$ est **en dessous de ses cordes** sur I.

f est **concave sur** I si, et seulement si, sa courbe $\mathscr{C}_f$ est **au dessus de ses cordes** sur I.

Exemples.

- Une fonctions affine est convexe et concave sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est confondue avec ses sécantes.
- La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \leq |\lambda| \times |x_1| + |1-\lambda| \times |x_2| = \lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2|.$$

Propriété 2 (Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes)

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I et $a, b \in I$ avec $a < b$.
La courbe de f est située sous sa sécante sur $[a,b]$ et au-dessus à l'extérieur de $[a,b]$.

Propriété 3 (*Inégalité de Jensen*)

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

1.3 Inégalité des pentes

Propriété 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $a \in I$, la « fonction pente en a » :

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

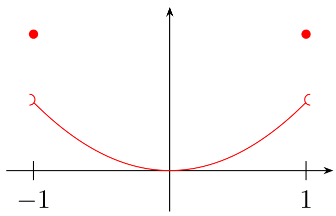
est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Corollaire 5

Si I est un intervalle **ouvert**, alors une fonction convexe sur I est continue sur I.

Mise en garde.

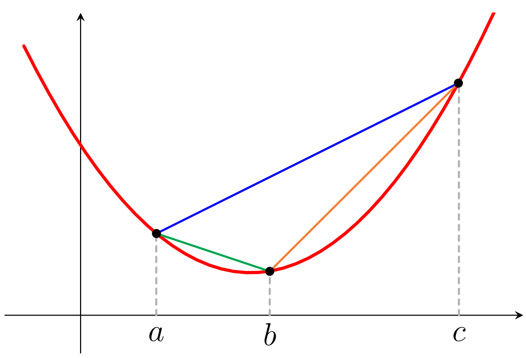
- Il est essentiel que l'intervalle I soit **ouvert** : par exemple, la fonction smiley ci-contre est convexe sur $[-1,1]$, mais pas continue en -1 et en 1.
- On a montré dans la preuve de la propriété précédente qu'une fonction convexe sur un intervalle I ouvert est dérivable à gauche et à droite en tout point de I. Mais elle n'est en général pas dérivable sur I, comme le montre le cas de la fonction valeur absolue.



Corollaire 6 (*Inégalité des trois pentes*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, pour tous a, b, c éléments distincts de I avec $a < b < c$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$



2 Convexité et dérivabilité

2.1 CNS de convexité pour une fonction dérivable

Propriété 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Il y a équivalence entre :

(1) f est convexe sur I ;

(2) f' est croissante sur I ;

(3) $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur I, c'est-à-dire :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

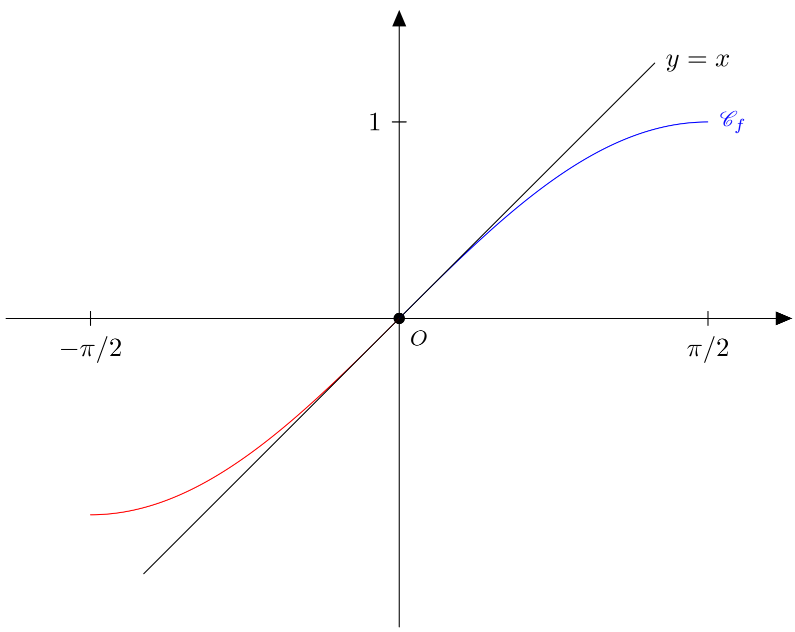
Corollaire 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe sur I si, et seulement si, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple. Étudions la convexité de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\sin)''(x) = -\sin(x).$$

Puisque $-\sin(x) \leq 0$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-\sin(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, la fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et convexe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Elle change ainsi de concavité en 0 : on parle de *point d'inflexion de la courbe*.



La courbe du sinus change de concavité en 0 :
elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (arc représenté en rouge) et concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (arc en bleu).

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit a un point intérieur à I.

On dit que f possède un *point d'inflexion* en a si f change de concavité en a, c'est-à-dire si f est convexe au voisinage de a à gauche et concave au voisinage de a à droite, ou l'inverse.

Si f est deux fois dérivable sur I, f admet un point d'inflexion en a si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.

Remarque. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un point d'inflexion en $a \in I$, alors la courbe de f traverse sa tangente en a. En effet, quitte à considérer $-f$ à la place de f, il existe $\eta > 0$ tel que f est concave sur $[a-\eta, a]$ et convexe sur $[a, a+\eta]$. Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente en a sur $[a-\eta, a]$ et au dessus sur $[a, a+\eta]$.

2.2 Inégalités de convexité classiques

Rappel. Convexité et position relative courbe/tangente et courbe/corde.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (resp. concave) sur un intervalle I, alors :

- sa courbe est en dessous (resp. au dessus) de ses cordes sur I ;
- sa courbe est au dessus (resp. en dessous) de ses tangentes sur I.

Exercice 1. Montrer les inégalités suivantes :

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$;

(2) $\forall x \in\,]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$;

(3) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 2. Montrer l'inégalité suivante, appelée *inégalité arithmético-géométrique* :

$$\forall x_1, \dots, x_n > 0,\ \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$