Chapitre 27

Applications linéaires

Compétences attendues.

✓ Montrer qu'une application est linéaire, déterminer son noyau, son image, son rang.

✓ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme.

✓ Montrer qu'une application linéaire est un projecteur ou une symétrie, et déterminer ses éléments caractéristiques.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Généralités

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais tous les résultats énoncés restent valables pour un corps quelconque.

1.1 Définition

Définition.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F.

On dit que f est un *morphisme d'espaces vectoriels*, ou plus simplement une *application linéaire*, si elle est compatible avec la loi de composition interne $+$ et la multiplication externe $\cdot$, soit si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

On notera $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. Une application linéaire n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes vérifiant en plus $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemples.

- $\mathrm{id}_E : E \to E$ est linéaire. Plus généralement, toute *homothétie*, c'est-à-dire toute application de la forme $\lambda \cdot \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, est linéaire.
- La trace et la transposition sont des applications linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ pour la trace et dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour la transposition.
- L'application $f_a : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(a) \in \mathbb{K}$ d'évaluation en $a \in \mathbb{K}$ d'un polynôme est linéaire.
- La dérivation $D : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$ est linéaire.
- L'intégration $I : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $I(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est linéaire.

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f((x, y, z)) = (x - y, y - z, z - x)$ est linéaire.

Propriété 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

- $f(0_E) = 0_F$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i).$$

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle *endomorphisme de* E toute application linéaire de E dans E. On note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On appelle *forme linéaire sur* E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E, aussi appelé *dual de* E.

Exemples.

- Les applications id_E, transposition et f définies précédemment sont des endomorphismes de E, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
- L'application d'évaluation f_a est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$, l'application trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 2

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$.

Propriété 3 (Composition d'applications linéaires)

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Propriété 4 (Bilinéarité de la composition)

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Alors :

(1) $R_g : h \mapsto g \circ h$ est une application linaire de $\mathscr{L}(E, F)$ dans $\mathscr{L}(E, G)$;

(2) $L_f : h \mapsto h \circ f$ est une application linaire de $\mathscr{L}(E, F)$ dans $\mathscr{L}(E, G)$.

Propriété 5

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (généralement non commutatif).

Pour aller plus loin.

Nous avons plus précisément montré que $(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F}(E, E)$. Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on peut donc définir l'endomorphisme $P(f) \in \mathscr{L}(E)$, évaluation de P en f, par :

$$P(f) = a_0 f^0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$$

où $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$.

Remarque. Toutes les règles de calculs valables dans un anneau le sont donc dans $\mathscr{L}(E)$, et en particulier le binôme de Newton et la troisième identité remarquable généralisée, sous réserve qu'on soit en présence de deux endomorphismes **qui commutent**. Notons d'ailleurs au passage que toute homothétie $\lambda \cdot \mathrm{id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E.

1.3 Image et noyau

Propriété 6

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire.

(1) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$f(E') = \{f(x),\, x \in E'\} = \{y \in F \mid \exists x \in E',\, y = f(x)\}$$

est un sous-espace vectoriel de F.

(2) Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle :

- *image de* f le sous-espace vectoriel noté $\mathrm{Im}(f)$ de F défini par $\mathrm{Im}(f) = f(E)$. Ainsi, pour tout $y \in F$:
$$y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x \in E,\ y = f(x).$$
- *noyau de* f le sous-espace vectoriel noté $\mathrm{Ker}(f)$ de E défini par $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_E\})$. Ainsi, pour tout $x \in E$:
$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F.$$

Propriété 7

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

(1) f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.

(2) f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Propriété 8

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire et $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Notons $\mathscr{F} = (f(e_i))_{i \in I}$.

(1) f est injective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une famille libre de F ;

(2) f est surjective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F ;

(3) f est bijective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base de F.

Corollaire 9

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire et $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_i))_{i \in I}.$$

Exercice 2. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

- $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x-y, y-z, z-x)$;
- $g : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - \mathrm{tr}(M)A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante (à retenir) :

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Propriété 10 (Noyau et image d'une restriction)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et A un sous-espace vectoriel de E. Alors :

$$\mathrm{Ker}(f_{|A}) = A \cap \mathrm{Ker}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f_{|A}) = f(A).$$

1.4 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par f si $f(F) \subset F$, soit :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Exemples.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Puisque $f(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $f(E) \subset E$, les sous-espaces $\{0_E\}$ et E sont stables par f.
- Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $D : P \in E \to P' \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}_n[x]$ est stable par D.

Propriété 11

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Alors l'application induite $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ par f sur F est un endomorphisme de F.

Propriété 12

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E, et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de F. Alors :

$$F \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad f(e_i) \in F \text{ pour tout } i \in I.$$

Exercice 4. Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ définie par $u(f) = f''$. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, et $F_\omega = \text{Vect}\,(x \mapsto \cos(\omega x), x \mapsto \sin(\omega x))$. Montrer que F_ω est stable par u et déterminer l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F_ω.

2 Isomorphismes

2.1 Definitions

Définition.

Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un *isomorphisme* si elle est bijective. Si de plus $E = F$, on dit que f est un *automorphisme de* E.

Propriété 13

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ deux isomorphismes. Alors :

(1) $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$ est un isomorphisme ;

(2) la bijection réciproque f^{-1} de f est un isomorphisme de F dans E.

Définition.

On appelle *groupe linéaire de* E, et on note $\mathrm{GL}(E)$, l'ensemble des automorphismes de E.
$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

2.2 Isomorphismes en dimension finie

Propriété 14

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même dimension finie**, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Exercice 5. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, et $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ l'application définie par :

$$\varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$. En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange associés à $x_0, \dots, x_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Propriété 15

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même dimension finie**, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est un isomorphisme de E sur F ;

(2) f admet un inverse à gauche : il existe $g \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$;

(3) f admet un inverse à droite : il existe $h \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $f \circ h = \mathrm{id}_F$;

De plus, l'inverse à gauche g et l'inverse à droite h coïncident avec f^{-1}.

Danger.

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie. Considérons par exemple la dérivation et l'intégration :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \quad \text{et} \quad I : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ g & \mapsto & \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

Alors $D \circ I = \mathrm{id}_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et D admet un inverse à droite. Mais D n'est pas un isomorphisme puisque $\mathrm{Ker}(D) = \{\text{fonctions constantes}\}$ n'est pas réduit au vecteur nul.

2.3 Espaces isomorphes

Définition.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que E est *isomorphe à* F s'il existe un isomorphisme entre E et F. On note alors $E \simeq F$.

Remarque. La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels :

- elle est réflexive : pour tout espace vectoriel E, id_E définit un isomorphisme de E dans lui-même ;
- elle est symétrique : pour tous espaces vectoriels E et F, si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme ;
- elle est transitive : pour tous espaces vectoriels E, F et G, si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme.

Étant donné la symétrie de la relation $\simeq$, si $E \simeq F$, on pourra dire plus simplement que E et F sont *isomorphes*.

Notre but dans la suite est de caractériser les classes d'équivalences pour $\simeq$ dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie.

Propriété 16 (Formes linéaires coordonnées dans une base)

Soit E un espace vectoriel possédant une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$.
Pour tout $i \in I$, on définit la *i-ème application coordonnée $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$ dans la base $\mathscr{B}$* par :

$$\varphi_i(x) = i\text{-ème coordonnée de } x \in E \text{ dans la base } \mathscr{B}.$$

L'application φ est une forme linéaire pour tout $i \in I$.

Exemple. Prenons le vecteur $u = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

- Dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, u s'écrit $u = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3$. Si on note φ_i les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, on obtient :
$$\varphi_1(u) = 3,\ \varphi_2(u) = 2,\ \varphi_3(u) = 1.$$
- Dans la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, u se décompose :
$$u = f_1 + f_2 + f_3.$$
Si on note ψ_i les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$, on obtient cette fois :
$$\psi_1(u) = 1,\ \psi_2(u) = 1,\ \psi_3(u) = 1.$$

Propriété 17 (Propriétés des formes linéaires coordonnées dans une base)

Soit E un espace vectoriel possédant une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$. Notons $(\varphi_i)_{i\in I}$ la famille des formes linéaires coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Alors :

- pour tout $x \in E$: $\quad x = \sum_{i\in I} \varphi_i(x)e_i$;
- pour tous $i, j \in I$: $\quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Propriété 18

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
L'application $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

est un isomorphisme. Ainsi, E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

Propriété 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et F un espace vectoriel.
Alors F est isomorphe à E si, et seulement si, F est de dimension finie et $\dim(F) = n$.
En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarque. Ainsi, si on considère l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie, les classes d'équivalences pour la relation $\simeq$ sont paramétrées par les entiers naturels, deux espaces vectoriels E et F étant dans la même classe d'équivalence si, et seulement si, ils ont même dimension.

Méthode. Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel ?

Pour montrer que E est de dimension finie n, on peut :

- *exhiber une base formée de n vecteurs ;*
- *exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n.*

Propriété 20

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ **injective** et F un sous-espace de E de dimension finie. Alors $f(F)$ est de dimension finie et $\dim(f(F)) = \dim(F)$.

2.4 Exemples d'isomorphismes en analyse

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $b, c \in \mathbb{K}$. Considérons l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$y'' + by' + cy = 0.$$

On a montré les résultats suivants au **Chapitre 11. Équations différentielles linéaires** :

- $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$;
- pour tout réel t_0, l'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \to & \mathbb{K}^2 \\ y & \mapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}_0$ dans $\mathbb{K}^2$. En effet, on vérifie aisément qu'elle est linéaire, et elle est bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui assure l'unicité de la solution à un problème de Cauchy).

Ainsi, l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $b, c \in \mathbb{K}$. On considère le sous-ensemble $\mathscr{S}_0$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0. \qquad (*)$$

L'équation (EC) : $r^2 + br + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* associée à la relation de récurrence linéaire.

Propriété 21

L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

On retrouve alors plus aisément le résultat suivant.

Propriété 22 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 - Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}_0$. Alors :

- si (EC) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- si (EC) admet une racine double r, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

3 Rang d'une application linéaire

3.1 Généralités

Définition.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire.
On dit que f est *de rang fini* si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle *rang de* f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension $\dim(\mathrm{Im}(f))$ de son image.

Propriété 23

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

(1) Si E est de dimension finie et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors f est de rang fini, et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

(2) Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini.

Propriété 24

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces de dimension finie. Alors :

- $\mathrm{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$;
- f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$;
- f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

Propriété 25 (Invariance du rang par isomorphismes)

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini. Alors :

- $\forall u \in \mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{rg}(f \circ u) = \mathrm{rg}(f)$;
- $\forall v \in \mathrm{GL}(F)$, $\mathrm{rg}(v \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

3.2 Théorème du rang

Propriété 26 (Forme géométrique du théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Supposons qu'il existe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. Alors $f_{|S}^{|\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 27 (*du rang*)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Danger.

Attention, il s'agit **uniquement** d'une égalité de dimension : en général, on n'a pas $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.

4 Modes de définition d'une application linéaire

4.1 Utilisation d'une base

Propriété 28

Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E possède une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$.
Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$\forall i \in I,\ f(e_i) = v_i.$$

Corollaire 29

- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.
- Une application linéaire s'annulant sur une base est nulle.

Propriété 30

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie, et :

$$\dim\left(\mathscr{L}(E, F)\right) = \dim(E) \times \dim(F).$$

4.2 Utilisation d'espaces supplémentaires

Propriété 31

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, et soit F un espace vectoriel. Pour tout couple $(f_1, f_2) \in \mathscr{L}(E_1, F) \times \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$f_{|E_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f_{|E_2} = f_2.$$

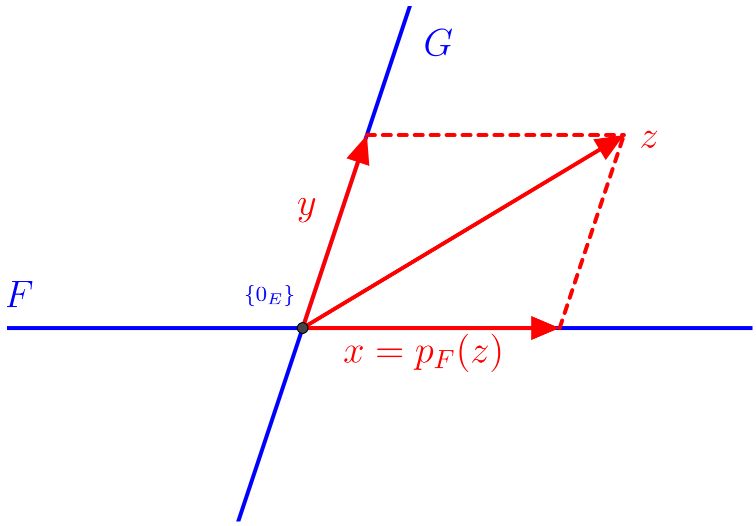
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

5.1 Projecteurs

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $z \in E$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.

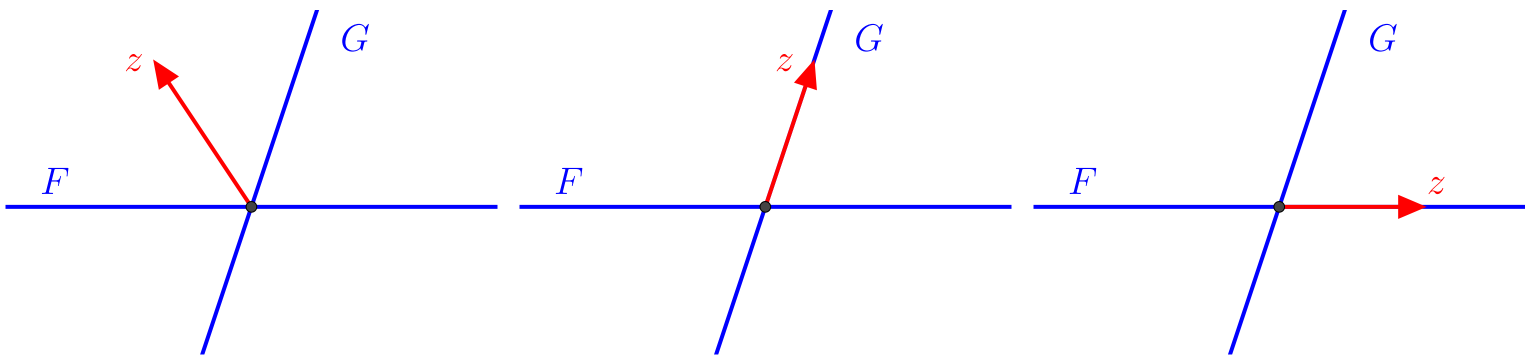
- Le vecteur x est appelé *la projection de z sur F parallèlement à G*, et noté $p(z)$.
- L'application $p : E \to E$ ainsi définie est appelée le *projecteur sur F parallèlement à G*



Projection sur F parallèlement à G.

Exemple. Notre ombre est la projection de notre silhouette sur le sol parallèlement aux rayons du soleil.

Exemple. Déterminer graphiquement la projection de z sur F parallèlement à G dans les cas suivants.



Propriété 32 (Propriétés des projecteurs)

(1) p est un endomorphisme de E satisfaisant $p \circ p = p$.

(2) $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$, de sorte que :

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in G, \quad p(y) = 0_E.$$

Remarque. Le projecteur sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire $p : E \to E$ telle que :

$$p_{|F} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad p_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}.$$

Propriété 33 (Caractérisation algébrique des projecteurs)

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p.$$

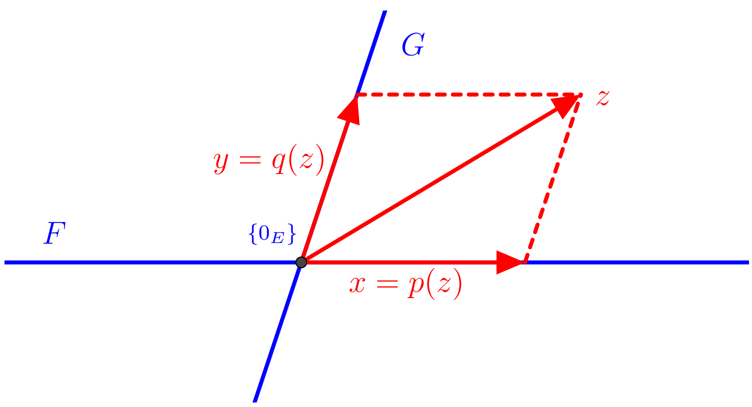
Plus précisément, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 7. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y) \end{array}$. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On dit que p et q sont les *projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$ si :

- p le projecteur sur F parallèlement à G ;
- q le projecteur sur G parallèlement à F.



Projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$.

Propriété 34 (Propriétés des projecteurs associés)

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

(1) $p + q = \mathrm{id}_E$;

(2) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

5.2 Symétries

Définition.

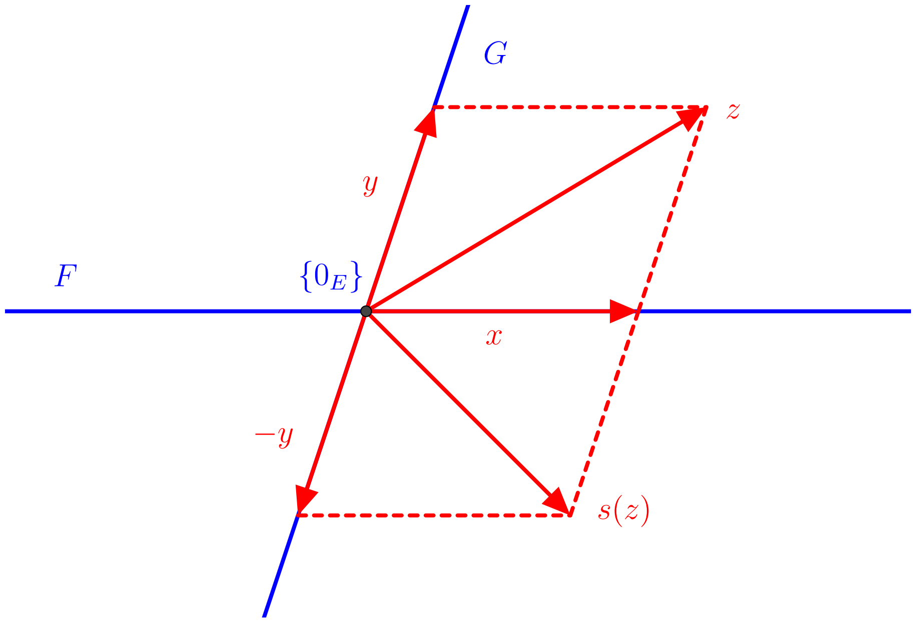
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, de sorte que pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que :

$$z = x + y.$$

On appelle *symétrie de z par rapport à F dans la direction de G*, et on note $s(z)$, le vecteur :

$$s(z) = x - y.$$

L'application $s : E \to E$ ainsi définie est appelée la *symétrie par rapport à F dans la direction de G*.



Symétrie de z par rapport à F dans la direction de G.

Propriété 35 (Propriétés des symétries)

Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, p et q les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. Alors :

(1) $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$. En particulier, s est un endomorphisme de E.

(2) $s \circ s = \mathrm{id}_E$. En particulier, s est un automorphisme de E, et $s^{-1} = s$.

(3) $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, de sorte que :

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in G, \quad s(y) = -y.$$

Remarque. Ainsi, la symétrie par rapport à F dans la direction de G est l'unique application linéaire $s : E \to E$ telle que :

$$s_{|F} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad s_{|G} = -\mathrm{id}_G.$$

Propriété 36 (Caractérisation algébrique d'une symétrie)

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors :
$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$
Plus précisément, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 8. À tout $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(-x).$$
Montrer que T est une symétrie de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

6 Équations linaires

Définition.

On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :

- $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F ;
- b un vecteur de F appelé *second membre de l'équation* ;
- $x \in E$ un vecteur inconnu.

On appelle *équation homogène associée* à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_F$.

Exemples.

- L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K}) & \to & \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y'' + by' + cy \end{array}$ est linéaire, et résoudre $y'' + by' + cy = d(t)$, c'est résoudre l'équation linéaire $\varphi(y) = d$.
- L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ est linéaire, et résoudre $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$, c'est résoudre l'équation linéaire $\psi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ est linéaire, et résoudre le système $AX = B$, c'est résoudre l'équation linéaire $f_A(X) = B$.

Propriété 37 (Structure des solutions de l'équation linéaire $f(x) = b$)

(1) L'ensemble des solutions de $f(x) = 0_F$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f)$.

(2) L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si, $b \in \mathrm{Im}(f)$, et alors $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$:
$$\mathscr{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(f)$$
où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.

7 Formes linéaires et hyperplans

7.1 Définitions et exemples

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et H un sous-espace vectoriel de E.
On dit que H est un *hyperplan de* E s'il existe une forme linéaire **non nulle** φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
L'équation linéaire $\varphi(x) = 0$ est alors appelée *équation de l'hyperplan* H.

Exemples.

- $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ car noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + 2y - t$.
- $K = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f(0) = f'(0) \right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $\psi : f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f(0) - f'(0)$.
- $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car noyau de la trace qui est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 38 (Caractérisation géométrique des hyperplans)

Soient E un espace vectoriel, et H un sous-espace vectoriel de E.
Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est supplémentaire d'une droite vectorielle.
De plus, si H est un hyperplan de E, alors pour tout $u \notin H$:

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(u).$$

Exemple. Puisque la fonction $u : x \in \mathbb{R} \mapsto 1$ n'appartient pas à K (car $u(0) = 1 \neq 0 = u'(0)$) :

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = K \oplus \mathrm{Vect}(u).$$

Propriété 39 (Comparaison des équations d'un hyperplan)

Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires sur E. Alors :

$$\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Ainsi, l'équation linéaire $\varphi(x) = 0$ définissant un hyperplan $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

7.2 Hyperplans en dimension finie

Propriété 40 (Caractérisation en dimension finie)

Soient E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et H un sous-espace vectoriel de E.
Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(H) = n - 1$.

Exemples.

- Un hyperplan du plan est une droite vectorielle, un hyperplan de l'espace est un plan vectoriel.
- $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est de dimension n^2-1 en tant qu'hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ étant par exemple $\mathrm{Vect}(I_n)$ puisque $I_n \notin \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

Propriété 41

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
Alors E^* est de dimension finie égale à n, et la famille $\mathscr{B}^*=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ des formes coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est une base de E^* appelée *base duale de* $\mathscr{B}$.

Conséquence. Soit E de dimension finie dont on fixe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Notons $\mathscr{B}^*=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ la base de E^* des formes coordonnées relativement à $\mathscr{B}$. Tout forme linéaire $\varphi\in E^*$ non nulle se décompose de manière unique dans $\mathscr{B}^*$ sous la forme :

$$\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i.$$

L'équation de l'hyperplan $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ se récrit, pour tout vecteur $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ de E :

$$0=\varphi(x)=\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x)=\sum_{i=1}^n a_ix_i.$$

On parle alors d'*équation cartésienne de l'hyperplan H dans la base $\mathscr{B}$*.

Exemples.

- La forme linéaire $\varphi:(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mapsto x+2y-t$ se décompose sous la forme $\varphi=\varphi_1+2\varphi_2-\varphi_4$ dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de sorte que l'hyperplan $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ a pour équation cartésienne $x+2y-t=0$ dans la base canonique.
- L'hyperplan $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a une équation cartésienne simple dans la base canonique : c'est l'ensemble des $M=(m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ tels que $m_{1,1}+\dots+m_{n,n}=0$.

Exercice 9. Montrer que $H=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\;\middle|\;\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$, et donner son équation cartésienne dans la base canonique.

Propriété 42 (Représentation d'un sous-espace)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r\in[\![1,n]\!]$.

(1) Si $H_1,\dots,H_r$ sont r hyperplans, alors : $\quad \dim\left(\bigcap_{i=1}^r H_i\right)\geq n-r.$

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$, alors il existe des hyperplans $H_1,\dots,H_r$ tels que $F=\bigcap_{i=1}^r H_i$.

Remarque. Notons $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ avec $\varphi_i \in E^*$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Pour tout $x \in E$:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{r} H_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \quad \vdots \\ \varphi_r(x) = 0 \end{cases}.$$

- Le point (1) de la propriété précédente justifie l'idée que chaque contrainte linéaire $\varphi_i(x) = 0$ occasionne potentiellement la perte d'une dimension par rapport à la dimension totale $\dim(E)$.
- Le point (2) nous fournit, en fixant une base $\mathscr{B}$ de E, un système de r équations cartésiennes à n inconnues définissant le sous-espace F, appelé *système d'équations cartésiennes de F* ou *représentation cartésienne de F dans la base $\mathscr{B}$*.

Exercice 10. Donner la représentation cartésienne de $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

7.3 Hyperplans affines

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathscr{H}$ un sous-espace affine de E.

On dit que $\mathscr{H}$ est un *hyperplan affine de E* s'il existe une forme linéaire **non nulle** φ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $\mathscr{H} = \varphi^{-1}(\{b\}) = \{x \in E \mid \varphi(x) = b\}$.

L'équation linéaire $\varphi(x) = b$ est appelée *équation de l'hyperplan affine H*.

Propriété 43

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathscr{H}$ un sous-espace affine de E.

$\mathscr{H}$ est un hyperplan affine si, et seulement si, sa direction H est un hyperplan vectoriel de E.

Les résultats obtenus pour les hyperplans vectoriels s'étendent alors naturellement au cas affine.

Remarque. On retrouve ici les faits bien connus suivants :

- dans un espace de dimension 2, les hyperplans affines - ou droites affines - sont les ensembles d'équation cartésienne $ax + by = c$ avec $(a,b) \neq (0,0)$;
- dans un espace de dimension 3, les hyperplans affines - ou plans affines - sont les ensembles d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Exemple. Considérons un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_p \end{cases} \quad \text{qu'on récrit} \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = b_1 \\ \quad \vdots \\ \varphi_n(x) = b_n \end{cases}$$

où φ_i est la forme linéaire non nulle $\varphi_i : (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions du système apparait ainsi comme l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$ des n hyperplans affines $\mathscr{H}_i = \varphi_i^{-1}(\{b_i\})$ de $\mathbb{K}^p$. C'est donc soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$, de dimension supérieure ou égale à $p - n$.