Chapitre 22

Développements limités

Compétences attendues.

- ✓ Connaître les développements limités de référence.
- ✓ Calculer un développement limité à partir des propriétés opératoires (primitive, somme, produit, composition, quotient).
- ✓ Étudier la position relative de la courbe d'une fonction par rapport à sa tangente ou à son asymptote en $+\infty$ à l'aide d'un développement limité.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Développements limités

Dans un chapitre précédent, nous avons introduit la notion de suites ou de fonctions équivalentes. Cependant, cette notion a quelques limites calculatoires :

- on ne peut sommer ou composer des équivalents, ce qui est particulièrement contraignant pour certains calculs ;
- les équivalents usuels ont été obtenus en approximant, au voisinage d'un point a, une fonction par sa tangente en a. Cette approximation par une fonction polynomiale de degré 1 n'est cependant pas suffisante pour résoudre certaines formes indéterminées.

Les développements limités vont répondre à ces deux obstructions. L'idée est d'approximer localement une fonction par une fonction polynomiale dont on fixera le degré (ou l'ordre) en fonction de la précision souhaitée de notre approximation locale.

Dans tout ce chapitre :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, $a \in \mathbb{R}$ un élément ou une extrémité de I, et $\mathscr{D}$ l'ensemble I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

Définition.

On dit que $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$ admet un *développement limité* en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\textit{partie régulière du DL}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\textit{reste}}.$$

Exemple. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}.$$

Comme $\dfrac{x^{n+1}}{x-1} = x^n \times \underbrace{\dfrac{x}{x-1}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = o(x^n)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet bien un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donné par :

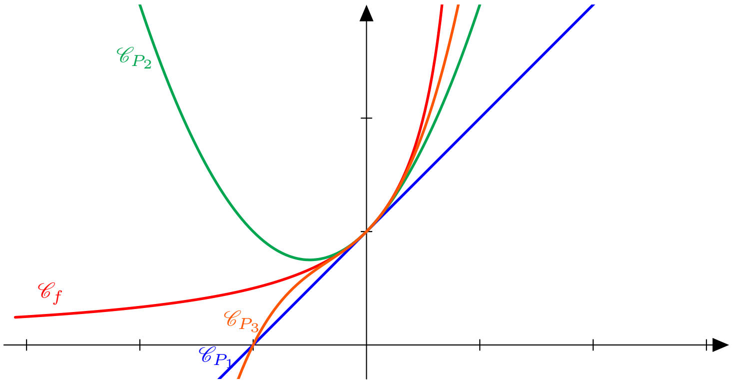
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

En composant par $x \mapsto -x$, on obtient également le développement limité suivant en 0 :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Remarque. Si f admet un $DL_n(a)$, elle peut être approximée **localement** en a par sa partie régulière. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ peut être approximée localement en 0 par les parties régulières de son développement limité en 0, par exemple à l'ordre 1 (on approxime f par sa tangente en 1), à l'ordre 2 ou 3 :

$$P_1 : x \mapsto 1+x \quad ; \quad P_2 : x \mapsto 1+x+x^2 \quad ; \quad P_3 : x \mapsto 1+x+x^2+x^3.$$



Plus l'ordre est grand, plus l'approximation de f par sa partie régulière est « bonne » au voisinage de 0. Notons également que les parties régulières ne sont de bonnes approximations de f qu'au voisinage de 0. Un développement limité en a n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de a, ce qui justifie la notation $\underset{x\to a}{=}$ dans l'écriture du développement limité.

Remarques.

- Chercher un développement limité de f au voisinage de a revient à chercher le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto f(a+x)$.

- Si f possède un développement limité à l'ordre n en a, alors elle possède un développement limité à tout ordre $m \leq n$ en a. En effet :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^m)}.$$

  On dit alors qu'on a *tronqué* le développement limité à l'ordre m.

Exercice 1. Calculer le $DL_3(2)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Propriété 1 (Unicité du développement limité)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, celui-ci est unique.

Corollaire 2 (Cas des fonctions paires et impaires)

Supposons $a = 0$ et $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à 0. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Si f est paire (resp. impaire), son développement limité en 0 ne contient que des termes pairs (resp. impairs).

Propriété 3 (Lien développement limité/continuité/dérivabilité)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et soit $a \in I$. Alors :

- f possède un développement limité d'ordre 0 en a si, et seulement si, elle est continue en a, et alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.
- f possède un développement limité d'ordre 1 en a si, et seulement si, elle est dérivable en a, et alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.

Remarque. Si f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet un développement limité à l'ordre 1 en a de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o((x-a))$, alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- le prolongement par continuité de f en a est dérivable en a, et $f'(a) = a_1$.

Mise en garde.
Ces résultats ne se généralisent pas pour des développements limités d'ordre supérieur : l'existence d'un développement limité d'ordre $n \geq 2$ au voisinage de a n'implique pas que f soit n fois dérivable sur un voisinage de a.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Propriété 4

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors, en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$: $\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

Remarque. f est donc du même signe strict que le premier terme non nul de son DL au voisinage de a.

1.2 Primitivation des développements limités

Propriété 5 (Lemme de primitivation des développements limités)

Soient $g : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons G une primitive de g sur I. Si $g(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$, alors $G(x) \underset{x\to a}{=} G(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Propriété 6 (Primitivation des développements limités)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si F est une primitive de f sur I, alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a, donné par :

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

⚠ **Mise en garde.**
Il n'y a pas de résultat analogue sur la dérivation des développements limités : dériver un développement limité de f ne fournit pas toujours un développement limité de f'.

Exemples.

- En intégrant le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, on obtient (compte tenu que $\ln(1) = 0$) :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- En intégrant le développement limité :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}),$$

  on obtient (compte tenu que $\arctan(0) = 0$) :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Exercice 3. Montrer que $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

1.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 7 (*Formule de Taylor-Young*)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point a de I, donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Remarques.

- Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ possède donc des développements limités en tout point et à tout ordre.
- En pratique, cette formule est difficilement utilisable pour l'obtention d'un développement limité, car elle impose de calculer les dérivées successives de f en a.

Exemples.

- exp est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc admet un développement limité à tout ordre en 0. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, donc admet un développement limité à tout ordre en 0. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

  Par exemple pour $\alpha = 1/2$ et $-1/2$, on obtient à l'ordre 3 :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

1.4 Opérations sur les développements limités

Nous énonçons dans cette section les principaux résultats sans démonstration. Conformément au programme officiel, il s'agit surtout de comprendre sur des exemples comment bien calculer avec des développements limités.

Combinaison linéaire, produit

Propriété 8

Supposons que f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q_n(x) + o(x^n).$$

(1) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to 0}{=} (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n).$$

(2) Le produit fg a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

où $T_n(PQ)$ désigne la troncature à l'ordre n du polynôme PQ.

Exemples.

- Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, on obtient à partir du développement limité de l'exponentielle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

- Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, on obtient de même que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Exercice 4. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \mathrm{sh}(x) - \sin(x)$; $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$; $\quad f_3 : x \mapsto \cos(x)^3$.

Remarque. Si on multiplie un DL à l'ordre p avec un DL à l'ordre n, la précision finale est $\min(n, p)$.

Composition

Propriété 9

Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ ont des développements limités en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q_n(x) + o(x^n),$$

et si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, alors $g \circ f$ a un développement limité à l'ordre n en 0 donné par :

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(Q_n \circ P_n)(x) + o(x^n).$$

Exercice 5. Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto (1+x)^x$; $\quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$; $\quad f_3 : x \mapsto e^{\cos(x)}$.

Quotient

Le quotient de deux fonctions admettant un développement limité en a n'admet pas forcément un développement limité en a : par exemple, $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sin(x)}$ n'a pas de limite finie en 0, donc n'admet pas de développement limité en 0. Ça sera cependant bien le cas si le dénominateur admet une limite non nulle en 0.

Méthode. Comment effectuer le développement limité d'un quotient ?

Pour faire le développement limité en 0 *d'un quotient* $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ *lorsque* $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$*, on se ramènera à un développement limité d'une composée en mettant ce quotient sous la forme :*

$$x \mapsto \frac{1}{1+u(x)} \quad \textit{avec} \quad u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 6. Déterminer des développements limités des fonctions suivantes :

- $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)}$;
- $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.

Remarque. Si le dénominateur g tend vers 0, il est encore possible que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ possède un développement limité : après factorisation et simplification des termes de plus bas degrés au dénominateur et au numérateur, on se ramène dans certains cas à un dénominateur de limite non nulle. On prendra garde cependant au fait que ceci diminue les ordres des développements limités.

Exercice 7. Déterminer, s'il existe, le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

1.5 Optimisation des calculs

Avoir une idée de ce qui peut se produire dans les calculs, avant d'avoir à les faire permet souvent d'anticiper, et de calculer les développements limité juste au bon ordre (c'est-à-dire sans trop en faire, mais également sans rien oublier). Dans cette optique, une bonne habitude est de s'intéresser au degré du premier terme non nul.

Exercice 8. Déterminer des développements limités des fonctions suivantes :

- $Dl_4(0)$ de $x \mapsto \sin(x)\ln(1+x^2)$;
- $DL_7(0)$ de $x \mapsto \arctan(x^3 e^x)$.

1.6 Développements limités usuels

Tous les développements limités qui suivent sont à connaître par cœur. Ils ont déjà été obtenus dans les sections précédentes.

Théorème 10 (Développements limités classiques au voisinage de 0)

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\\
\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)\\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Astuce.

Voici quelques méthodes pour retenir, retrouver ou contrôler ces formules de développements limités.

- Le DL de $x \mapsto e^x$ en 0 s'obtient par la formule de Taylor-Young et, comme elle, fait apparaître des factoriels aux dénominateurs.

  Les DL des fonctions cos, ch, sin, sh s'en déduisent par combinaisons linéaires, en tant que parties paires et impaires des fonctions exp et $x \mapsto e^{ix}$. On retiendra que :

  – cos et ch (resp. sin et sh) étant des fonctions paires (resp. impaires), il n'y a que des termes pairs (resp. impairs) dans leur DL ;

  – la présence des factoriels aux dénominateurs (provenant du DL de l'exponentielle) ;

  – on n'oubliera pas l'alternance des signes pour cos et sin (due aux puissances du i complexe dans les formules).

- Le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ se retrouve à partir de la somme des termes d'une suite géométrique. On en déduit :
  - le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ en remplaçant x par $-x$ dans celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$;
  - le DL de $x \mapsto \ln(1-x)$ en primitivant celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On retiendra en particulier les facteurs $\dfrac{1}{k}$ dus à l'intégration de x^{k-1}, et les signes $-$ dus à l'intégration de $\dfrac{1}{1-x}$ en $-\ln(1-x)$.
  - le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ en remplaçant x par $-x$ dans celui de $x \mapsto \ln(1-x)$.
- Le DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ se déduit de la formule de Taylor-Young et, comme elle, fait apparaitre des factoriels aux dénominateurs. Remarquons aussi que si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

  et on retrouve la formule du binôme de Newton tronquée à l'ordre n.

Enfin, lors de la recherche d'un $DL(a)$ d'une fonction f dérivable, on contrôlera ses deux premiers termes a_0 et a_1 en notant que :

$$a_0 = f(a) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(a).$$

2 Applications des développements limités

2.1 Recherche de limites et d'équivalents

Rappel. Obtention d'un équivalent à partir d'un DL.
Si f admet un développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_p \neq 0$, alors : $\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

Exercice 9. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\dfrac{\sin(2x)-\mathrm{sh}(2x)}{(2x-\sin(x)-\tan(x))^2}$.

Exercice 10. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2}$.

2.2 Étude locale d'une fonction

Rappel. Prolongement par continuité à l'aide d'un DL.
Si f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet un développement limité à l'ordre 1 en a de la forme $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o((x-a))$, alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- le prolongement par continuité de f en a est dérivable en a, et $f'(a) = a_1$.

Exercice 11. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge par continuité en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Méthode. Position local de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f par rapport à sa tangente en a ?
On cherche un équivalent de $x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$ en a en effectuant le développement limité de f en a :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p \quad \textit{avec} \quad a_p \in \mathbb{R}^* \quad \textit{et} \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Alors $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

- *si p est pair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a, et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p) ;*
- *si p est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en a, et $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en a. On parle de point d'inflexion.*

Remarque. Dans le cas d'un point critique a, c'est-à-dire si $f'(a) = 0$, cette étude permet de déterminer si f admet un extremum local en a (si n pair) ou non (si n est impair).

Exercice 12. Étudier les fonctions suivantes au voisinage de 0 :

- $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1-2x)}{1+x}$;
- $g : x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{1+x^2}$.

2.3 Notion de développement asymptotique et applications

Un développement limité en $a \in \mathbb{R}$ est la décomposition d'une fonction sur l'*échelle* des termes $(x-a)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Cette décomposition est ordonnée de sorte que chaque nouveau terme soit négligeable devant celui qui précède. En élargissant le champ des fonctions sur lesquelles on autorise la décomposition, on obtient la notion de développement asymptotique.

Définition.
Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. On appelle *développement asymptotique* d'une fonction définie au voisinage de a la décomposition de son expression en somme d'expressions « simples » ordonnées en négligeabilité croissante.

Remarque. Un développement asymptotique se calcule de la même façon qu'un développement limite, seule l'échelle des fonctions selon laquelle on exprime le résultat est élargie.

Exercice 13. Calculer les trois premiers termes des développements asymptotiques quand $x \to 0$ de :

- $x \mapsto \sin(x \ln(x))$;
- $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)^2}}$.

Méthode. Détermination d'une asymptote oblique à une courbe.

Supposons que f admette un développement asymptotique en $\pm\infty$ de la forme suivante :

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$, et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$ au voisinage de $\pm\infty$ est donnée par le signe[a] de $\pm a_2$.

[a] Si $a_2 = 0$, on poursuit le développement asymptotique jusqu'à trouver un terme non nul (s'il en existe).

Exercice 14. Soit $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$. Déterminer si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$, et préciser leurs positions relatives.