

Analyse asymptotique

1	Relations de comparaison : cas des suites	2
1.1	Relations de domination, de négligeabilité	2
1.2	Relation d'équivalence	5
2	Relations de comparaison : cas des fonctions	7
2.1	Relations de domination, de négligeabilité	7
2.2	Relation d'équivalence	8

Compétences attendues.

- ✓ Montrer l'équivalence, la négligeabilité ou la domination de deux suites ou deux fonctions.
- ✓ Maitriser les opérations sur les équivalents, les petits o et les grands O .
- ✓ Connaître les croissances comparées et les équivalents usuels.

1 Relations de comparaison : cas des suites

Dans ce chapitre, nous donnons des outils performants pour décrire des concepts que vous avez déjà en tête depuis quelques temps : l'idée qu'une suite ou une fonction « l'emporte sur une autre », et donc impose sa limite. Par exemple, lorsque vous écriviez

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^4 + n^3 + 5n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n^4) = -\infty, \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x+1} = +\infty,$$

rien ne justifiait jusque-là ces égalités, même si elles semblent relever du bon sens. Afin de formaliser cette idée, nous introduisons les notions de suite ou fonction dominée, négligeable ou équivalente à une autre.

Dans cette section, les suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1.1 Relations de domination, de négligeabilité

Définitions et premiers exemples

Définition.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- On dit que (u_n) est *dominée par* (v_n) s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leq M|v_n|$ à partir d'un certain rang, soit formellement :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M|v_n|.$$

- On dit que (u_n) est *négligeable devant* (v_n) si pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$ à partir d'un certain rang, soit formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$

Notation.

- Notation de Bachmann : si (u_n) est dominée par (v_n) , on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ (se lit « (u_n) est un grand o de (v_n) »). C'est cette notation qui est souvent utilisée dans l'analyse de la complexité d'un algorithme.
- Notation de Landau : si (u_n) est négligeable devant (v_n) , on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ (se lit « (u_n) est un petit o de (v_n) »).

Remarques.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.
- La relation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(0)$ (ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(0)$) signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.
- La relation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ signifie que (u_n) est bornée, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Propriété 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec (v_n) qui ne s'annule pas. Alors :

- $u_n = O(v_n)$ si, et seulement si, la suite $(\mu_n) = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. Ainsi :

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mu_n v_n \text{ avec } (\mu_n) \text{ bornée.}$$

- $u_n = o(v_n)$ si, et seulement si, la suite $(\varepsilon_n) = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. Ainsi :

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \varepsilon_n v_n \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Exemples.

- $\frac{\cos(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $(\cos(n))$ est bornée, $n^3 \sin(n) = o(n^5)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \sin(n)}{n^5} = \frac{\sin(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si $p < q$, alors $n^p = o(n^q)$ et $\frac{1}{n^q} = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

**Mise en garde.**

Les égalités $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ ne sont pas des égalités au sens usuel. Par exemple, $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$, ce qui n'implique pas $n = n^2$. Ces égalités indiquent seulement que (u_n) appartient à l'ensemble des suites négligeables devant (v_n) ou dominées devant (v_n) . Il est théoriquement plus correct, mais lourd, d'écrire $(u_n) \in o(v_n)$ ou $(u_n) \in O(v_n)$.

Remarque. En pratique, on pensera la négligeabilité et la domination des suites **en termes de quotients**. Dans cette perspective, nous supposons pour les démonstrations des propriétés qui suivent que toutes les suites rencontrées ne s'annulent pas.

Opérations sur les o et O **Propriété 2 (Transitivité des relations o et O)**

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Propriété 3 (Opérations sur les o et O)

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) quatre suites, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(1) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = O(w_n)$.

Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

(2) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(t_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n t_n)$.

Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.

(3) Si $\lambda \neq 0$ et si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n = O(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = O(v_n)$.

Si $\lambda \neq 0$ et si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.

(4) Si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n w_n = O(v_n w_n)$.

Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

(5) Si $u_n = o(v_n)$ (resp. $u_n = O(v_n)$), alors pour toute extractrice φ , $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$ (resp. $u_{\varphi(n)} = O(v_{\varphi(n)})$).

Exercice 1. Réduire l'écriture des expressions asymptotiques suivantes :

(1) $o(2n) - 2o((-1)^n n)$; (2) $n \ln(n) + O(n+1) + o(n^2)$; (3) $2o(n)O(n) - nO(n)$.

Croissances comparées**Propriété 4** (Croissances comparées)

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$, et $q > 1$. Alors :

$$q^{-n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\ln(n)^\beta\right), \quad \ln(n)^\beta = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(q^n), \quad q^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

Remarque. La relation de négligeabilité étant transitive, on peut utiliser la notation $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, et enchaîner les comparaisons. Le résultat précédent se réécrit ainsi :

$$\frac{1}{n!} \ll q^{-n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \ln(n)^\beta \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Exercice 2. Classer par négligeabilité les termes généraux qui suivent :

(1) $n, n^2, \ln(n), e^n, n \ln(n), \frac{n^2}{\ln(n)}$; (2) $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\ln(n)}, \frac{\ln(n)}{n}, \frac{\ln(n)}{n^2}, \frac{1}{n \ln(n)}$.

1.2 Relation d'équivalence

Définition et premières propriétés

Définition.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ si $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, soit formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

Dans le cas où la suite (v_n) ne s'annule pas, il est équivalent d'exiger que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemples.

- $\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$ car $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- $n + \sqrt{n} \sin(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ car $\frac{n + \sqrt{n} \sin(n)}{n} = 1 + \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Remarque. Si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ si, et seulement si, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$. Un équivalent de $u_n - \ell$ permet d'évaluer la vitesse de convergence de (u_n) vers ℓ .

Mise en garde.

On se méfiera de l'équivalence $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, quasiment toujours fautive, car elle signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. **Je ne veux donc pas voir écrit** $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, et on retiendra qu'on n'est jamais équivalent à 0, sauf si on est complètement nul (à partir d'un certain rang).

Exercice 3. Chercher un équivalent de $u_n = \frac{1}{n} + n \ln(n) + \sqrt{n} + \frac{e^n}{n}$.

Propriété 5

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$;
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.

Alors $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

Propriété 6

Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

Opérations sur les équivalents

Propriété 7

La relation \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Ainsi, si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites :

- *Réflexivité* : $u_n \sim u_n$;
- *Symétrie* : $u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$;
- *Transitivité* : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Propriété 8 (Opérations sur les équivalents)

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors :

- | | |
|---|---|
| (1) $u_n v_n \sim w_n t_n$; | (4) si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé , $u_n^\alpha \sim w_n^\alpha$. |
| (2) si (v_n) et (t_n) ne s'annulent pas, $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}$; | |
| (3) pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé , $u_n^k \sim w_n^k$; | (5) pour toute extractrice φ , $u_{\varphi(n)} \sim w_{\varphi(n)}$. |



Danger.

Ce sont les seules opérations autorisées pour les équivalents. Ainsi :

- **on ne simplifie pas les constantes dans les équivalents** : par exemple $\frac{2n+1}{3n^3+n} \sim \frac{2}{3n}$,
mais $\frac{2n+1}{3n^3+n} \not\sim \frac{1}{n}$.
- **on ne somme pas et on ne soustrait pas les équivalents** : par exemple, $n+1 \sim n+2$ et $-n \sim -n$, mais $1 \not\sim 2$.
- **on ne compose pas les équivalents** par une fonction : par exemple, $n+1 \sim n$, mais $e^{n+1} \not\sim e^n$ puisque $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \not\rightarrow 1$.
- lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être **constant** : par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1$ (car $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ et donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$).

Si on souhaite un équivalent d'une somme ou d'une composée, on effectuera un développement limité.

Exemple. Si $P : x \mapsto a_p x^p + \dots + a_1 x + a_0$ et $Q : x \mapsto b_q x^q + \dots + b_1 x + b_0$ avec $a_p, b_q \neq 0$, alors :

$$P(n) = a_p n^p + o(n^p) \sim a_p n^p \quad \text{et} \quad \frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}.$$

Propriété 9

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si, et seulement si, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

Et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice 4. Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 - n + 1}$.

Formule de Stirling**Propriété 10 (Formule de Stirling)**

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 5. Déterminer un équivalent de $u_n = \binom{2n}{n}$.

2 Relations de comparaison : cas des fonctions

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), \mathcal{D} désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur \mathcal{D} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ;
- si les fonctions sont définies en a , on supposera de plus qu'elles sont continues en a .

Rappel. On appelle *voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$* tout ensemble V de la forme :

- si $a \in \mathbb{R}$, $V = [a - \eta, a + \eta]$, avec $\eta > 0$;
- si $a = -\infty$, $V =] - \infty, B]$ avec $B \in \mathbb{R}$.
- si $a = +\infty$, $V = [A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;

On note \mathcal{V}_a l'ensemble des voisinages du point a .

2.1 Relations de domination, de négligeabilité

Définition.

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathcal{D} à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que :

- f est *dominée par g* au voisinage de a , et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$, si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent d'exiger que la fonction

$\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

- f est négligeable devant g au voisinage de a , et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent d'exiger que la fonction $\varepsilon = \frac{f}{g}$ tend vers 0 en a (auquel cas on posera $\varepsilon(a) = 0$). Ainsi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemples.

- $x^2 \sin(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^3)$ car pour tout $x \neq 0$, $\left| \frac{x^2 \sin(2x)}{x^3} \right| \leq \frac{x^2 \times |2x|}{|x^3|} = 2$.
- Si $p < q$, alors $x^p \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^q)$ et $x^q \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$.

Remarques.

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.
- La relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a , $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$ signifie que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- La relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$ signifie qu'il existe $\varepsilon_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \varepsilon_n(x)(x-a)^n \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_n(x) = 0.$$
- Toutes les règles de calcul énoncées pour les suites restent valables pour les fonctions.

Propriété 11 (Croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\ln(x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha x}), \quad |\ln(x)|^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\alpha x} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$$

2.2 Relation d'équivalence

Définition.

Soient f et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est équivalente à g en a , et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, si $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap \mathcal{D}, |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent d'exiger que la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a .

Propriété 15 (Équivalents classiques au voisinage de 0)

- | | | |
|---|---|---|
| • $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$; |
| • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$; |
| • $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $1 - \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. |
| • $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | • $\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$; | |

Propriété 16

Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

- Si f est de signe constant (> 0 ou < 0) au voisinage de a , alors g est de même signe strict que f au voisinage de a .
- La fonction g admet une limite (finie ou infinie) en a si, et seulement si, f admet une limite en a . Et alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Exercice 6. Trouver les limites des expressions suivantes quand x tend vers 0 :

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{\tan(x)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}(e^{\operatorname{ch}(x)} - e).$$