Chapitre 15

Dénombrement

Compétences attendues.

✓ Calculer le cardinal d'un ensemble fini à partir d'opérations sur les ensembles, d'une bijection, d'une partition ou du principe des bergers.

✓ Exploiter une hypothèse de cardinalité, notamment pour le principe des tiroirs.

✓ Connaître et maitriser les dénombrements d'ensembles usuels : listes, arrangements, combinaisons.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Généralités sur les ensembles finis

1.1 Ensembles finis et cardinaux

Définition.

On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une injection $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$.
Si un tel entier n n'existe pas, on dit que E est *infini*.

Propriété 1 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)

Soit A un sous-ensemble de E. Si E est fini, alors A est fini.

Propriété 2

- Soit $A \subset [\![1, n]\!]$ non vide. Alors il existe $1 \leq m \leq n$ tel que A est en bijection avec $[\![1, m]\!]$.
- Soient n et m dans $\mathbb{N}^*$. S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Propriété 3 (Caractérisation des ensembles finis et cardinal d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble non vide. Alors E est fini si, et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$.
Un tel entier n, s'il existe, est unique. On l'appelle le *cardinal de* E, et on le note $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$. Si E est l'ensemble vide, son cardinal est nul par convention.

Remarque. On retrouve bien ici ce qu'on imagine être un ensemble fini : un ensemble dont on peut « compter » les éléments. C'est exactement ce que fait une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E : elle établit une correspondance entre les entiers de 1 à n et les éléments de E, telle qu'à chaque nombre correspond un unique élément de E et vice-versa.

Mise en garde.

Si l'entier $n = \mathrm{Card}(E)$ est unique, la bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ ne l'est pas. En effet, pour toute bijection $\psi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$, $\varphi \circ \psi : [\![1, n]\!] \to E$ est encore bijective. Composer par une telle bijection ψ revient à changer le « numéro » qu'on attribue à chaque élément de E.

Exemples.

- $\mathrm{Card}([\![1, n]\!]) = n$ puisque $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$ est bijective.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $f : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \to & \mathbb{U}_n \\ k & \mapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$ est bijective. Donc $\mathbb{U}_n$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathbb{U}_n) = n$.

Exercice 1. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$. Montrer que $[\![p, q]\!]$ est fini de cardinal $q - p + 1$.

Propriété 4

Si E est de cardinal $n \in \mathbb{N}$, et si F est en bijection avec E, alors F est fini de cardinal n.

Remarque. Cette propriété sera très utile par la suite. En effet, il peut être pénible de revenir à la définition en comparant à un ensemble $[\![1, n]\!]$. On cherche plutôt la mise en bijection avec des ensembles de référence qu'on va étudier dans la suite de ce chapitre.

1.2 Opérations sur les ensembles et cardinaux

Propriété 5 (Cardinal d'une union disjointe)

- Si E et F sont des ensembles finis et disjoints, alors $E \sqcup F$ est fini et :
$$\text{Card}(E \sqcup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F).$$
- Plus généralement, si $E_1, \dots, E_k$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints, alors $E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k$ est fini et :
$$\text{Card}(E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k) = \text{Card}(E_1) + \dots + \text{Card}(E_k).$$

Corollaire 6 (Cardinal du complémentaire, de la différence)

Soient E un ensemble fini, A et B deux parties de E. Alors :

- $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$.
- $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

Corollaire 7 (Cardinal d'un sous-ensemble)

Soient E un ensemble fini, et soit A une partie de E. Alors $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$.

Méthode. Comment montrer une égalité entre des ensembles finis de même cardinal ?
Pour prouver une égalité entre deux ensembles finis A et B de même cardinal, il suffit de prouver l'une des deux inclusions $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Propriété 8 (Cardinal d'une union)

Soient E, F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini, et :
$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F).$$

Remarque. En particulier, si E et F sont finis, alors :
$$\text{Card}(E \cup F) \leq \text{Card}(E) + \text{Card}(F).$$
Cette propriété se généralise par récurrence immédiate à un nombre fini $E_1, \dots, E_k$ d'ensembles finis :
$$\text{Card}(E_1 \cup \dots \cup E_k) \leq \text{Card}(E_1) + \dots + \text{Card}(E_k).$$

Exercice 2. Soient E, F, G trois ensembles finis. Déterminer $\text{Card}(E \cup F \cup G)$.

Pour aller plus loin.

On peut montrer plus précisément par récurrence la formule suivante (appelée *formule du crible de Poincaré*, hors programme) :

$$\mathrm{Card}(E_1 \cup \cdots \cup E_k) = \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} \mathrm{Card}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_j}) \right).$$

Propriété 9 (Cardinal d'un produit cartésien)

- Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\}$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

- Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_k$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times \cdots \times E_k$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_k).$$

1.3 Applications entre deux ensembles finis

Propriété 10

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

(1) Si f est injective et si F est fini, alors E est fini et $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.

(2) Si f est surjective et si E est fini, alors F est fini et $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

Propriété 11

Soient E et F deux ensembles finis **de même cardinal**, et $f : E \to F$ une application. Alors il y a équivalence entre :

(1) f est injective ; (2) f est surjective ; (3) f est bijective.

Méthode. Comment montrer qu'une application entre ensembles finis est bijective ?

Pour prouver qu'une application entre deux ensembles finis est bijective, il suffit désormais d'établir l'injectivité (ou de manière équivalente la surjectivité) et de prouver l'égalité des cardinaux.

2 Dénombrements usuels

2.1 Principes de dénombrement

La section précédente permet de dégager deux méthodes essentielles de dénombrement :

- mettre l'ensemble à dénombrer en bijection avec un ensemble connu ;
- considérer une partition de l'ensemble à dénombrer.

Détaillons et formalisons deux autres résultats classiques de dénombrement.

Propriété 12 (*Principe des bergers*)

Soient E et F deux ensembles, avec F fini, et $f : E \to F$ une application.
Si pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini, alors E est fini et :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{y \in F} \mathrm{Card}(f^{-1}(\{y\})).$$

En particulier, si tous les éléments de F ont le même nombre p d'antécédents par f, alors $\mathrm{Card}(E) = p \times \mathrm{Card}(F)$.

Remarques.

- Un version plus intuitive serait : pour connaître le nombre de moutons sous sa garde, un berger n'a qu'à compter le nombre de pattes, puis le diviser par 4. C'est le cas où f est l'application qui à une patte associe son mouton, et pour laquelle on a donc $p = 4$.
- D'apparence anodine, le principe des bergers est en fait un résultat fondamental que nous utiliserons tout le temps : lorsqu'un problème de dénombrement peut se décomposer en plusieurs étapes, avec par exemple n choix possibles à l'étape 1, et **pour chaque choix** de l'étape 1, p choix possibles à l'étape 2, alors le nombre total de choix[1] est np.

Exercice 3. À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Exercice 4. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire successivement sans remise. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

Astuce.

Lors d'un dénombrement, pour savoir si l'on doit additionner ou multiplier, on retiendra :

« on a SOIT ceci, SOIT cela »	$\to$	partition	$\to$	ADDITION
« on fait ceci, PUIS cela »	$\to$	lemme des bergers	$\to$	MULTIPLICATION

[1]L'application correspondante à cette situation est celle qui à un choix possible associe la situation à l'étape précédente permettant ce choix

Propriété 13 (*Principe des tiroirs*)

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Si $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$, alors f n'est pas injective : il existe deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Remarques.

- Une version plus intuitive (et qui justifie le nom) serait : si on range n chaussettes dans p tiroirs et que $n > p$, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.
- Pour utiliser ce résultat, on cherche souvent les « bons tiroirs », c'est-à-dire le découpage adapté à notre problème.

Exemple. En notant que :

- Dijon compte 257 193 habitants,
- une personne a au plus 200 000 cheveux,

on peut affirmer que deux dijonnais au moins ont exactement le même nombre de cheveux. En effet, en répartissant les 257 193 dijonnais selon leur nombre de cheveux, dans 200 001 tiroirs, le principe des tiroirs nous garantie que deux personnes au moins ont le même nombre de cheveux.

Exercice 5. On considère cinq points du plan à coordonnées entières. Montrer que parmi tous les segments ayant ces points pour extrémité, l'un au moins admet pour milieu un point à coordonnées entières.

2.2 Dénombrement des ensembles d'applications entre ensembles finis

Définition.

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Une *p-liste*, ou *p-uplet*, d'éléments de E est un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de $E^p = E \times \cdots \times E$.
- Un *p-arrangement* de E est une p-liste d'éléments **distincts** de E

Mise en garde.

L'ordre des éléments compte dans une p-liste et un p-arrangement. De plus, il peut y avoir des répétitions dans une p-liste, contrairement aux p-arrangements.

Propriété 14

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Le nombre de p-listes de E est égal à n^p.
- Le nombre de p-arrangements de E est $\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$ si $p \leq n$, 0 sinon.

Exercice 6. De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement avec ou sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Exercice 7. Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot OUPS, tel que BOUPSAR ?

Exercice 8. De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

Propriété 15

Soient E et F deux ensembles finis. Alors l'ensemble $F^E = \mathscr{F}(E,F)$ des applications de E dans F est fini, et :

$$\mathrm{Card}\left(F^E\right) = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Corollaire 16 (Nombre de parties d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini, et $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Propriété 17

Soient E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments.

L'ensemble des applications injectives de E dans F a pour cardinal $\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$.

Propriété 18

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Alors l'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ des bijections de E sur E (aussi appelées *permutations de E*) est fini de cardinal $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) = n!$.

Exercice 9. Soit $n \geq 4$. Combien existe-t-il de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant 1, 2 et 3 comme point fixe ? De permutations laissant stable $\{1, 2, 3\}$?

2.3 Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Définition.

Soit E un ensemble, et soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-combinaison de E* toute partie de E à p éléments.

Mise en garde.

Notez bien la différence entre les p-arrangements et les p-combinaisons :

- pour les p-arrangements, **on tient compte de l'ordre**. Par exemple, $(2, 1) \neq (1, 2)$.
- pour les p-combinaisons, **aucun ordre n'est pris en compte**. Par exemple, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

On utilise les combinaisons dans tous les problèmes de choix simultanés de p éléments distincts parmi n, sans considération d'ordre et sans répétition.

Propriété 19

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de p-combinaisons de E est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$. Autrement dit, $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de E à p éléments.

Exercice 10. Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes, l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte. Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Plusieurs résultats sur les coefficients binomiaux, prouvés par le calcul trouvent alors une interprétation en termes de combinaisons.

Propriété 20 (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Alors :

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $p \cdot \binom{n}{p} = n \cdot \binom{n-1}{p-1}$
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Propriété 21 (Formule du binôme de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

On retrouve alors un résultat déjà donné précédemment.

Corollaire 22 (Nombre de parties d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exercice 11. Déterminer le nombre de façons de ranger p objets indiscernables dans n boîtes numérotées de 1 à n sans répétition (au plus un objet par boite) ? avec répétition (pas de limite du nombre d'objets par boite) ?

Astuce.

On distinguera bien les modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener :

Tirages successifs AVEC REMISE = LISTES	Tirages successifs SANS REMISE = ARRANGEMENTS	Tirages SIMULTANÉS = COMBINAISONS

Liens utiles.

Les nombres de Catalan, Deux (deux ?) minutes pour..., El Jj.