Mémoire de fin de Master
Année 2009-2010
Généralisations de l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques et applications

Mathieu Mansuy*
sous la direction de Marc Rosso

Résumé Depuis ces vingt dernières années, deux généralisations de l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques *Sym* sont apparues et ont montré leur importance : l'algèbre de Hopf des fonctions non commutatives symétriques *NSym* et l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques *QSym* (voir section 1). La compréhension de la version non commutative de certaines structures de l'algèbre *Sym* est devenue essentielle. Ainsi, les problèmes de factorisations de Lazard des monoïdes libres s'expriment grâce à des fonctions non-commutatives symétriques, généralisations naturelles des fonctions symétriques associées à la construction de l'anneau des vecteurs de Witt $W(A)$ (voir section 3). Mais, *NSym* et *QSym* ne sont pas les seules généralisations non commutatives de *Sym* que l'on peut considérer. Il existe notamment une algèbre de Hopf auto-duale qui généralise ces deux algèbres de Hopf : l'algèbre de Hopf des permutations introduite par Malvenuto, Poirier et Reutenauer (*MPR*), qui s'interprète naturellement comme une algèbre de Hopf d'endomorphismes. Ce point de vue suggère d'ailleurs d'autres généralisations, nombreuses, et nous amène à considérer les algèbres de Hopf d'endomorphismes et les algèbres de Hopf de mots (voir section 2).

Table des matières

*e-mail : mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Exemples fondamentaux d'algèbres de Hopf

1.1 Algèbre de Hopf de concaténation et de de battage

Dans cette section ainsi que dans toute la suite, on appelera composition tout mot en les entiers naturels non-nuls. Si $\alpha = [a_1, a_2, ..., a_m]$ est une composition, on appelera $lg(\alpha) = m$ la longueur de α, $wt(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} a_i$ son poids, $ht(\alpha) = max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ sa hauteur, $supp(\alpha) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ le support de α, i.e. l'ensemble des différentes lettres apparaissant dans α, et $msupp(\alpha) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ le multi-support, i.e. les différentes lettres qui apparaissent dans le mot α avec leurs multiplicités.

1.1.1 Algèbre de Hopf de concaténation *LieHopf*

On définit *LieHopf* comme l'algèbre associative libre sur $\mathbb{Z}$ en une infinité dénombrable d'indéterminées $\{U_1, U_2, \ldots\}$, soit :

$$LieHopf = \mathbb{Z}\langle U_1, U_2, \ldots\rangle \tag{1}$$

Munie du coproduit Δ, uniquement déterminé par la formule $\Delta(U_n) = U_n \otimes 1 + 1 \otimes U_n$ et le fait que Δ soit un morphisme d'algèbres, et de la counité ε qui envoie chaque U_n sur 0 (et 1 sur 1), *LieHopf* est une bigèbre cocommutative. Elle est de plus graduée connexe, en posant U_n homogène de degré n. C'est donc une algèbre de Hopf, l'antipode S étant donnée par $S(U_n) = -U_n$. On l'appelle l'algèbre de Hopf de concaténation. Sa série formelle est donnée par :

$$F_{LieHopf}(h) = \frac{1-h}{1-2h} \tag{2}$$

Si $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ est une composition, U_α désigne l'élement :

$$U_\alpha = U_{a_1}U_{a_2}\dots U_{a_m} \text{ et } U_{[\,]} = 1$$

le degré du monôme U_α étant le poids de la composition α. L'ensemble des monômes U_α forme une base du groupe abélien libre *LieHopf*, la multiplication étant simplement donnée par la concaténation $\star$.

On dira que β est un sous-mot de α, et on notera $\beta \subseteq \alpha$, s'il est de la forme $\beta = [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}]$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. En particulier, le mot vide et α lui-même sont des sous-mots de α. β^c désigne dans la suite le sous-mot complémentaire de β. Par exemple, si $\alpha = [3, 2, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 4]$ et $\beta = [2, 1, 4]$ est le sous-mot de α formé de la seconde lettre, la quatrième et la dernière, $\beta^c = [3, 2, 4, 5, 2, 1]$. α a 2^m sous-mots. Avec ces notations, le coproduit de *LieHopf* peut être décrit de manière plus explicite.

Proposition 1 *Soit $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ une composition, on a :*

$$\Delta(U_\alpha) = \sum_{\beta\subseteq\alpha} U_\beta \otimes U_{\beta^c} \tag{3}$$

Démonstration : Par récurrence sur $m = lg(\alpha)$. C'est immédiat si $m = 1$. Supposons le résultat vrai au rang $m - 1$.

$$\begin{aligned}
\Delta(U_\alpha) &= \Delta(U_{a_1}\dots U_{a_{m-1}})\Delta(U_{a_m}) \\
&= \left(\sum_{\beta\subseteq[a_1,a_2,\dots,a_{m-1}]} U_\beta \otimes U_{\beta^c}\right)(U_{a_m} \otimes 1 + 1 \otimes U_{a_m}) \\
&= \sum_{\beta\subseteq[a_1,a_2,\dots,a_{m-1}]} U_\beta U_{a_m} \otimes U_{\beta^c} + \sum_{\beta\subseteq[a_1,a_2,\dots,a_{m-1}]} U_\beta \otimes U_{\beta^c}U_{a_m} \\
&= \sum_{\beta} U_\beta \otimes U_{\beta^c}
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple

$$\Delta(U_{[1,1,3]}) = 1 \otimes U_{[1,1,3]} + 2U_{[1]} \otimes U_{[1,3]} + U_{[3]} \otimes U_{[1,1]} + U_{[1,1]} \otimes U_{[3]} + 2U_{[1,3]} \otimes U_{[1]} + U_{[1,1,3]} \otimes 1$$

Par définition de Δ, les indéterminées U_n sont des éléments primitifs de *LieHopf*. On a de plus le résultat suivant :

Proposition 2 *(i) La sous-algèbre de Lie de LieHopf engendrée par $U_1, U_2, \dots$ est l'algèbre de Lie libre L sur $U_1, U_2, \dots$*

(ii) L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie L est LieHopf.

(iii) Notons $LieHopf_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} LieHopf$, $L_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$. On a : $Prim(LieHopf_{\mathbb{Q}}) = L_{\mathbb{Q}}$.

1.1.2 Algèbre de battage *Shuffle*

On étudie à présent *Shuffle*, le dual gradué de *LieHopf*. *LieHopf* étant non commutative et cocommutative, *Shuffle* est commutative et non cocommutative. Nous allons en donner une description.

Comme dual gradué de *LieHopf*, *Shuffle* est le groupe abélien libre de base l'ensemble des compositions. Il est muni de la graduation donnée par $deg(\alpha) = wt(\alpha)$ pour toute composition α. Le crochet de dualité entre *LieHopf* et *Shuffle* est donné par :

$$LieHopf \times Shuffle \longrightarrow \mathbb{Z}, \langle U_\alpha, \beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \tag{4}$$

On définit le produit et le coproduit sur *Shuffle* par dualité :

$$\langle U_\alpha \otimes U_{\alpha'}, \Delta_{Sh}(\beta) \rangle = \langle m_{LH}(U_\alpha \otimes U_{\alpha'}), \beta \rangle \tag{5}$$

$$\langle U_\alpha, m_{Sh}(\beta \otimes \beta') \rangle = \langle \Delta(U_\alpha), \beta \otimes \beta' \rangle \tag{6}$$

où le crochet de dualité est défini naturellement sur (*LieHopf* $\otimes$ *LieHopf*) $\times$ (*Shuffle* $\otimes$ *Shuffle*) comme suit :

$$(LieHopf \otimes LieHopf) \times (Shuffle \otimes Shuffle) \longrightarrow \mathbb{Z}, \langle U_\alpha \otimes U_{\alpha'}, \beta \otimes \beta' \rangle = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha',\beta'}$$

On explicite le produit et le coproduit dans *Shuffle* :

$$\begin{aligned} \langle U_\alpha \otimes U_{\alpha'}, \Delta_{Sh}(\beta) \rangle &= \langle m_{LH}(U_\alpha \otimes U_{\alpha'}), \beta \rangle = \langle U_{\alpha \star \alpha'}, \beta \rangle \\ &= \delta_{\alpha \star \alpha', \beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } lg(\alpha) + lg(\alpha') \neq lg(\beta) \\ \delta_\alpha^{[b_1, \ldots, b_{lg(\alpha)}]} \delta_{\alpha'}^{[b_{lg(\alpha)+1}, \ldots, b_{lg(\alpha)+lg(\alpha')}]} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\beta = [b_1, \ldots, b_{lg(\beta)}]$. Dans tous les cas :

$$\langle U_\alpha \otimes U_{\alpha'}, \Delta_{Sh}(\beta) \rangle = \left\langle U_\alpha \otimes U_{\alpha'}, \sum_{i=0}^{lg(\beta)} \beta_{[1,\ldots,i]} \otimes \beta_{[i+1,\ldots,lg(\beta)]} \right\rangle$$

Le coproduit dans *Shuffle* est donc le coproduit de déconcatenation. Pour le produit m_{Sh} :

$$\begin{aligned} \langle U_\alpha, m_{Sh}(\beta \otimes \beta') \rangle &= \langle \Delta(U_\alpha), \beta \otimes \beta' \rangle = \sum_{\alpha'} \langle U_{\alpha'} \otimes U_{\alpha'^c}, \beta \otimes \beta' \rangle = \sum_{\alpha'} \delta_{\alpha',\beta}\delta_{\alpha'^c,\beta'} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } lg(\alpha) \neq lg(\beta) + lg(\beta') \\ \displaystyle\sum_{\alpha', lg(\alpha') = lg(\beta)} \delta_{\alpha',\beta}\delta_{\alpha'^c,\beta'} & \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, par exemple :

$$\begin{aligned} \langle U_{[1,2]}, m_{Sh}([1] \otimes [2]) \rangle &= \langle U_{[1]} \otimes U_{[2]}, [1] \otimes [2] \rangle + \langle U_{[2]} \otimes U_{[1]}, [1] \otimes [2] \rangle = 1 \\ \langle U_{[2,1]}, m_{Sh}([1] \otimes [2]) \rangle &= \langle U_{[2]} \otimes U_{[1]}, [1] \otimes [2] \rangle + \langle U_{[1]} \otimes U_{[2]}, [1] \otimes [2] \rangle = 1 \end{aligned}$$

donc $m_{Sh}([1] \otimes [2]) = [1,2] + [2,1]$. Autre exemple :

$$\begin{aligned} \langle U_{[1,2,3]}, m_{Sh}([1,2] \otimes [3]) \rangle &= \langle U_{[1,2]} \otimes U_{[3]}, [1,2] \otimes [3] \rangle + \langle U_{[1,3]} \otimes U_{[2]}, [1,2] \otimes [3] \rangle \\ &\quad + \langle U_{[3,1]} \otimes U_{[2]}, [1,2] \otimes [3] \rangle \\ &= 1 = \langle U_{[1,3,2]}, m_{Sh}([1,2] \otimes [3]) \rangle = \langle U_{[3,1,2]}, m_{Sh}([1,2] \otimes [3]) \rangle \end{aligned}$$

et $\langle U_\alpha, m_{Sh}([1,2] \otimes [3]) \rangle = 0$ pour toute autre composition α. Donc $m_{Sh}([1,2] \otimes [3]) = [1,2,3] + [1,3,2] + [3,1,2]$.

De facon générale, on a ainsi montré que :

$$m_{Sh}(\beta \otimes \beta') = \beta \times_{Sh} \beta' \quad (7)$$

où $\times_{Sh}$ désigne le produit de battage de deux mots, que l'on décrit brièvement. Le produit de battage de deux mots $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ et $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ est la somme de toutes les permutations de $[a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n]$, avec multiplicité, pour lesquelles les lettres de α et celles de β apparaissent dans leur ordre initial. Par exemple, $[3] \times_{Sh} [1, 2, 4] = [3, 1, 2, 4] + [1, 3, 2, 4] + [1, 2, 3, 4] + [1, 2, 4, 3]$ et $[1] \times_{Sh} [1, 2] = 2[1, 1, 2] + [1, 2, 1]$.

Remarque 3 *On peut aussi définir $\times_{Sh}$ de manière récursive, de la facon suivante : $1 \times_{Sh} \alpha = \alpha \times_{Sh} 1 = \alpha$ pour tout mot α, et si $\alpha = [a] \star \alpha'$ et $\beta = [b] \star \beta'$ (où $a, b \in \mathbb{N}^*$ et α' et β' sont des mots) :*

$$[a] \star \alpha' \times_{Sh} [b] \star \beta' = [a] \star (\alpha' \times_{Sh} [b] \star \beta') + [b] \star ([a] \star \alpha' \times_{Sh} \beta')$$

Cette équation exprime qu'une certaine application est une dérivation de Shuffle. En effet, fixons une lettre a et définissons l'application linéaire $D : \alpha \mapsto a^{-1}\alpha$ avec $a^{-1}\alpha = \alpha'$ si $\alpha = [a] \star \alpha'$, $a^{-1}\alpha = 0$ si α ne commence pas par la lettre a. Alors, D est une dérivation de l'algèbre Shuffle :

$$D(\alpha \times_{Sh} \beta) = D(\alpha) \times_{Sh} \beta + \alpha \times_{Sh} D(\beta)$$

Théorème-définition 4 *Le dual gradué de l'algèbre de Hopf LieHopf est donné par l'algèbre de Hopf graduée connexe Shuffle commutative et non-cocommutative. Le produit et le coproduit sont donnés, pour toutes compositions $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$, $\alpha' = [a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}]$, $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$, par :*

$$m_{Sh}(\alpha \otimes \alpha') = \alpha \times_{Sh} \alpha' = \sum_{\sigma \in bat(m,n)} [a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(m)}, a_{\sigma^{-1}(m+1)}, \ldots, b_{\sigma^{-1}(m+n)}] \quad (8)$$

$$\Delta_{Sh}(\beta) = \sum_{\beta' \star \beta'' = \beta} \beta' \otimes \beta'' \quad (9)$$

où dans (8), $bat(m, n)$ désigne l'ensemble des (m, n)-battages, i.e. des bijections $\sigma \in S_{m+n}$ croissantes sur $\{1, \ldots, m\}$ et sur $\{m + 1, \ldots, m + n\}$, et où dans (9), la somme est prise sur toutes les coupes de β, i.e. sur l'ensemble des paires (β', β'') dont la concatenation $\beta' \star \beta''$ est égale à β. L'unité est le mot vide 1, et la counité envoie tout mot non-vide sur 0. L'antipode est donné par $S([a_1, a_2, \ldots, a_m]) = (-1)^m [a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1]$. $(Shuffle, m_{Sh}, \Delta_{Sh})$ est appelée l'algèbre de Hopf de battage, ou algèbre de Hopf cotensorielle. Sa série formelle est :

$$F_{Shuffle}(h) = \frac{1 - h}{1 - 2h}$$

Remarque 5 *On peut munir le groupe abélien libre de base l'ensemble des compositions d'une autre structure d'algèbre de Hopf en prenant comme produit le produit de concaténation $\star$, et comme coproduit Δ pour lequel tous les mots de longueur un sont primitifs. Bien entendu, cette algèbre de Hopf est isomorphe à $(LieHopf, m_{LH}, \Delta_{LH})$. Le crochet de dualité s'identifie alors avec le produit scalaire $\langle ., . \rangle'$ pour lequel les compositions forment une base orthonormale. En particulier, $\langle ., . \rangle'$ définit un crochet de Hopf sur LieHopf$\times$ Shuffle, i.e. :*

$$\langle \alpha \otimes \alpha', \Delta_{Sh}(\alpha'') \rangle' = \langle \alpha \star \alpha', \alpha'' \rangle' \quad (10)$$

$$\langle \Delta_{LH}(\alpha), \alpha' \otimes \alpha'' \rangle' = \langle \alpha, \alpha' \times_{Sh} \alpha'' \rangle' \quad (11)$$

1.2 Algèbres de Hopf des fonctions symétriques, non commutatives symétriques, quasi-symétriques

1.2.1 L'algèbre des fonctions symétriques

Soit $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ une famille d'indéterminées. On munit l'algèbre des polynômes en les indéterminées $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}[\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots]$, d'un coproduit défini comme suit : pour tout $n \geqslant 1$:

$$\Delta(\Sigma_n) = \sum_{i+j=n} \Sigma_i \otimes \Sigma_j, \text{ avec } \Sigma_0 = 1 \tag{12}$$

Par propriété universelle de $\mathbb{Z}[\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots]$, Δ se prolonge en un unique morphisme d'algèbres de A dans $A \otimes A$. De plus, Δ est clairement coassociatif. La counité est donnée par $\varepsilon(\Sigma_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. A est ainsi munie d'une structure de bigèbre. On définit une graduation en mettant Σ_n homogène de degré n pour tout $n \geqslant 1$. Cette graduation est connexe. A possède donc un antipode. L'algèbre de Hopf ainsi obtenue s'appelle *Sym*, algèbre de Hopf des fonctions symétriques. Notons que *Sym* est commutative et cocommutative. Sa série formelle est :

$$F_{Sym}(h) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-h^n} \tag{13}$$

Si $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ est une composition, on note encore Σ_α l'élement $\Sigma_\alpha = \Sigma_{a_1}\Sigma_{a_2}\ldots\Sigma_{a_m}$ et $\Sigma_{[\,]} = 1$. On dira que α est une partition si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$. Alors (Σ_α), où α parcourt l'ensemble des partitions, est une base du groupe abélien libre *Sym*.

Pour décrire l'antipode, on aura besoin des notations supplémentaires suivantes : on dit qu'une composition $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ est un raffinement de α s'il existe des entiers $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m = n$ tels que $a_i = b_{j_{i-1}+1} + \ldots + b_{j_i}$ où $j_0 = 0$. On le notera dans la suite $\beta \succcurlyeq \alpha$. On peut le représenter de la manière suivante :

$$[\underbrace{b_1, \ldots, b_{j_1}}_{a_1}, \underbrace{b_{j_1+1}, \ldots, b_{j_2}}_{a_2}, \ldots, \underbrace{b_{j_{n-1}+1}, \ldots, b_n}_{a_m}]$$

Par exemple, les raffinements de $[3, 1]$ sont $[3, 1]$, $[2, 1, 1]$, $[1, 2, 1]$, et $[1, 1, 1, 1]$.

Proposition 6 *S est l'unique morphisme d'algèbres de Sym tel que pour tout $n \geqslant 1$:*

$$S(\Sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_k \geqslant 1 \\ a_1 + \ldots + a_k = n}} (-1)^k \Sigma_{a_1} \ldots \Sigma_{a_k} = \sum_{wt(\alpha)=n} (-1)^{lg(\alpha)} \Sigma_\alpha$$

On a de plus la formule explicite suivante pour l'antipode :

$$S(\Sigma_\alpha) = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} (-1)^{lg(\beta)} \Sigma_\beta \tag{14}$$

Démonstration : Par récurrence sur n. Si $n = 1$, Σ_1 étant primitif, $S(\Sigma_1) = -\Sigma_1$. Soit $n \geqslant 2$, et supposons la propriété vraie pour tout $k \leqslant n-1$:

$$m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(\Sigma_n) = S(\Sigma_n) + \sum_{i=1}^{n-1} S(\Sigma_i)\Sigma_{n-i} + \Sigma_n = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned}
S(\Sigma_n) &= -\Sigma_n - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k\geqslant 1\\ a_1+\ldots+a_k=i}}(-1)^k\Sigma_{a_1}\ldots\Sigma_{a_k}\Sigma_{n-i}\\
&= -\Sigma_n + \sum_{k\geqslant 1}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}\geqslant 1\\ a_1+\ldots+a_k+a_{k+1}=n}}(-1)^{k+1}\Sigma_{a_1}\ldots\Sigma_{a_k}\Sigma_{a_{k+1}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k\geqslant 1\\ a_1+\ldots+a_k=n}}(-1)^k\Sigma_{a_1}\ldots\Sigma_{a_k}
\end{aligned}$$

Pour le second point, grâce au résultat précédent, et puisque S est un morphisme d'algèbres (Sym est commutative), on obtient :

$$\begin{aligned}
S(\Sigma_\alpha) &= \sum_{wt(\beta_1)=a_1}(-1)^{lg(\beta_1)}\Sigma_{\beta_1}\ldots\sum_{wt(\beta_n)=a_n}(-1)^{lg(\beta_n)}\Sigma_{\beta_n}\\
&= \sum_{wt(\beta_1)=a_1,\ldots,wt(\beta_n)=a_m}(-1)^{lg(\beta_1)+\ldots+lg(\beta_n)}\Sigma_{\beta_1}\ldots\Sigma_{\beta_n}\\
&= \sum_{\beta\succcurlyeq\alpha}(-1)^{lg(\beta)}\Sigma_\beta
\end{aligned}$$

$\square$

Il y a de nombreuses raisons de s'intéresser à l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques. En effet, elle apparait dans des domaines très variés des mathématiques : par exemple lors de l'étude des représentations des groupes symétriques, ou encore dans la théorie des vecteurs de Witt[1].

Pour les résultats suivants, il est nécessaire de travailler sur $\mathbb{Q}$, et non sur $\mathbb{Z}$ comme précédement. On notera donc $Sym_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} Sym$ l'algèbre correspondante sur $\mathbb{Q}$. Par le théorème de Cartier-Quillen-Minor-Moore, $Sym_{\mathbb{Q}}$ étant graduée connexe commutative et cocommutative, $Sym_{\mathbb{Q}} \approx U(Prim(Sym_{\mathbb{Q}})) = S(Prim(Sym_{\mathbb{Q}}))$. On souhaite avoir ici une base de $Prim(Sym_{\mathbb{Q}})$. Notons p_n la dimension de $Prim(Sym_{\mathbb{Q}})_n$. La série formelle de Poincaré-Hilbert de $Sym_{\mathbb{Q}}$ est :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-h^n} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-h^n)^{p_n}}$$

Par récurrence, on obtient $p_n = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. On définit alors des éléments Γ_n par leur série génératrice dans $Sym_{\mathbb{Q}}[[t]]$ (t est une nouvelle indéterminée centrale) en posant :

$$\sum_{i\geqslant 1}\Gamma_i t^i = log(1+\Sigma_1 t+\Sigma_2 t^2+\ldots) \tag{15}$$

Montrons que les Γ_i sont des éléments primitifs :

[1] voir la section 3 pour des précisions sur ce point.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geqslant 1}\Delta(\Gamma_i)t^i &= log\left(\sum_{n\geqslant 0}\Delta(\Sigma_n)t^n\right) = log\left(\sum_{n\geqslant 0}\sum_{p+q=n}\Sigma_p t^p\otimes\Sigma_q t^q\right)\\
&= log\left(\left(\sum_{p\geqslant 0}\Sigma_p t^p\otimes 1\right)\left(1\otimes\sum_{q\geqslant 0}\Sigma_q t^q\right)\right)\\
&= log\left(\sum_{p\geqslant 0}\Sigma_p t^p\otimes 1\right) + log\left(1\otimes\sum_{q\geqslant 0}\Sigma_q t^q\right)\\
&= log\left(\sum_{p\geqslant 0}\Sigma_p t^p\right)\otimes 1 + 1\otimes log\left(\sum_{q\geqslant 0}\Sigma_q t^q\right)\\
&= \sum_{i\geqslant 1}(\Gamma_i\otimes 1 + 1\otimes\Gamma_i)t^i
\end{aligned}$$

où la quatrième égalité est vraie puisque $log(ab) = log(a) + log(b)$ si a et b commutent. En développant (15), on obtient :

$$\Gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k\geqslant 1\\ a_1+\ldots+a_k=n}}\Sigma_{a_1}\ldots\Sigma_{a_k} = \sum_{wt(\alpha)=n}\frac{(-1)^{lg(\alpha)+1}}{lg(\alpha)}\Sigma_\alpha \tag{16}$$

Γ_n est donc un élément homogène de degré n, non-nul puisque le coefficient de Γ_n en Σ_n est non-nul. Par suite, $\{\Gamma_n\}$ est une base de $Prim(Sym_{\mathbb{Q}})_n$ puisque cet espace est de dimension un. En conséquence :

Proposition 7 *(i) La famille $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est une base de $Prim(Sym_{\mathbb{Q}})$.*

(ii) $Sym_{\mathbb{Q}}$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf $\mathbb{Q}[\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots] = S(Prim(Sym_{\mathbb{Q}}))$. En particulier, $Sym_{\mathbb{Q}}$ est auto-duale, i.e. est isomorphe à son dual gradué.

Exemples

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Sigma_1\\
\Gamma_2 &= \Sigma_2 - \frac{1}{2}\Sigma_1^2\\
\Gamma_3 &= \Sigma_3 - \frac{1}{2}(\Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_2\Sigma_1) + \frac{1}{3}\Sigma_1^3\\
&= \Sigma_3 - \Sigma_1\Sigma_2 + \frac{1}{3}\Sigma_1^3
\end{aligned}$$

Bases de l'algèbre Sym :

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble infini dénombrable, totalement ordonné, de variables qui commutent, et $\mathbb{Z}[[X]]$ l'algèbre commutative des séries formelles en ces variables sur $\mathbb{Z}$. On va interpréter l'algèbre *Sym* comme une sous-algèbre de $\mathbb{Z}[[X]]$. Pour cela, on dira qu'un élément $F = F(x)$ de degré fini de $\mathbb{Z}[[X]]$ est une *fonction symétrique* si quelque soit $y_1,\ldots,y_k,z_1,\ldots,z_k$ dans X, les y_i étant pris deux à deux distincts, tout comme les z_j, et pour tout choix d'entiers positifs $a_1,\ldots,a_k$, les monômes $y_1^{a_1}\ldots y_k^{a_k}$ et $z_1^{a_1}\ldots z_k^{a_k}$ apparaissent avec les mêmes coefficients dans F. On note $Sym = Sym(x)$ l'ensemble des fonctions symétriques. C'est clairement une sous-algèbre de $\mathbb{Z}[[X]]$.

L'algèbre *Sym* est un $\mathbb{Z}$-module libre de base (m_α) indexée par les partitions $\alpha = [a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_k]$, avec m_α défini par :

$$m_\alpha = \sum x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_k}^{a_k} \tag{17}$$

où la somme est prise sur les variables dans X, en supposant les indices i_j deux à deux distincts. On définit une graduation sur l'algèbre des fonctions symétriques en posant $deg(m_\alpha) = wt(\alpha)$.

Pour tout $n \geqslant 1$, la *fonction symétrique élémentaire* d'indice n, notée Σ_n, est la somme de tous les produits de n variables distinctes de X, soit $\Sigma_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$:

$$\Sigma_n = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n} = m_{[1^n]} \tag{18}$$

Elle est homogène de degré n (en particulier, cette graduation coïncide avec celle qu'on a pu mettre en place auparavant). La série génératrice des Σ_n est :

$$\sigma(t) = \sum_{n \geqslant 0} \Sigma_n t^n = \prod_{i \geqslant 1} (1 + x_i t) \tag{19}$$

Théorème 8 *On a :*

$$Sym = \mathbb{Z}[\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots]$$

et les Σ_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration : Soit F une fonction symétrique de degré fini n. Considérons I l'idéal de $\mathbb{Z}[[X]]$ engendré par $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, et notons $\pi : \mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z}[[X]]/I$ la surjection canonique. Clairement, $\mathbb{Z}[[X]]/I \simeq \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. De plus, $\pi(\Sigma_k) = \Sigma_{k,n}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$, avec $\Sigma_{k,n}$ la fonction symétrique élémentaire d'ordre k à n indéterminées, et $\pi(\Sigma_k) = 0$ pour $k > n$. Alors, $\pi(F) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{sym} = \mathbb{Z}[\Sigma_{1,n}, \ldots, \Sigma_{n,n}]$. En particulier, il existe $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que $\pi(F) = Q(\Sigma_{1,n}, \ldots, \Sigma_{n,n}) = \pi(Q(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n))$. Or, F et $Q(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ appartiennent à Sym_n, $\mathbb{Z}$-module constitué des fonctions symétriques de degré $\leqslant n$. Et π restreinte à Sym_n est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules de Sym_n sur $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_n^{sym}$: elle transforme la base $(m_\alpha)_{wt(\alpha) \leqslant n}$ en une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]_n^{sym}$. Finalement, $F = Q(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ et les fonctions symétriques élémentaires engendrent l'algèbre des fonctions symétriques.
Reste à montrer que les fonctions symétriques élémentaires sont algébriquement indépendantes : pour celà il suffit de voir que pour tout $n \geqslant 1$, $P(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n) = 0$ si et seulement si $P = 0$. Soit donc $n \geqslant 1$, et P un polynôme tel que $P(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n) = 0$. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[[X]]$ engendré par $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$, et $\pi : \mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z}[[X]]/I$ la surjection canonique. On a :

$$0 = \pi(P(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)) = P(\Sigma_{1,n}, \ldots, \Sigma_{n,n})$$

toujours avec les mêmes notations. Or, on sait que les polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_{i,n}$ sont algébriquement indépendants. Ainsi, P est le polynôme nul. Ce qui termine la démonstration.

□

On définit à présent d'autres fonctions symétriques, les *fonctions symétriques homogènes complètes S_n*, comme suit :

$$S_n = \sum_{wt(\alpha) = n} m_\alpha \tag{20}$$

S_n est donc la somme des tous les monômes de degré total n en les variables $x_1, x_2, \ldots$ En particulier, $S_0 = 1$, $S_1 = \Sigma_1$, et S_n est homogène de degré n. La série génératrice des S_n est donnée par :

$$s(t) = \sum_{n \geqslant 0} S_n t^n = \prod_{i \geqslant 1} (1 - x_i t)^{-1} \tag{21}$$

Étant donné (19) et (21), on a :

$$s(t)\sigma(-t) = 1 \tag{22}$$

soit de façon équivalente, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Sigma_k S_{n-k} = 0 \tag{23}$$

Cette égalité est appelée la formule de Wronski. Puisque les Σ_n sont algébriquement indépendants, on peut définir le morphisme d'algèbres homogène :

$$\omega : Sym \longrightarrow Sym, \ \omega(\Sigma_n) = S_n \text{ pour tout } n \geqslant 0 \tag{24}$$

Proposition 9 *(i) ω est une involution, i.e. $\omega^2 = Id$.*
(ii) $Sym = \mathbb{Z}[S_1, S_2, \ldots]$, et les S_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration : (i) résulte de la symétrie dans (23). Quant à (ii), c'est une conséquence directe du premier point et du théorème 8.

□

Pour toute partition $\alpha = [a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_m]$, on note :

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha &= \Sigma_{a_1} \ldots \Sigma_{a_m} \\ S_\alpha &= S_{a_1} \ldots S_{a_m} \end{aligned}$$

On dispose alors de trois bases du groupe abélien libre *Sym*, indexées par les partitions : les m_α, les Σ_α et les S_α, l'involution ω faisant correspondre la deuxième et la troisième base. Si l'on pose $f_\alpha = \omega(m_\alpha)$ pour toute partition α, les f_α forment une quatrième base du groupe abélien libre *Sym*. On les appelle les fonctions symétriques "oublies", elles n'ont pas particulièrement de descriptions directes simples.

On définit enfin les *fonctions symétriques sommes de puissances* P_n par :

$$P_n = \sum_{i \geqslant 1} x_i^n = m_{[n]} \tag{25}$$

pour $n \geqslant 1$. P_n est homogène de degré n. La série génératrice des P_n est :

$$p(t) \ = \ \sum_{n \geqslant 1} P_n t^{n-1} = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{n \geqslant 1} x_i^n t^{n-1} = \sum_{i \geqslant 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{i \geqslant 1} \frac{d}{dt} \left(log \frac{1}{1 - x_i t} \right)$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
p(t) = \frac{d}{dt} log \prod_{i \geqslant 1} (1 - x_i t)^{-1} = \frac{d}{dt} log\ s(t) = \frac{s'(t)}{s(t)} \\
p(-t) = -\frac{d}{dt} log\ \sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}
\end{aligned} \tag{26}
$$

On en déduit les égalités suivantes, pour tout $n \geqslant 1$:

$$
nS_n = \sum_{k=1}^{n} P_k S_{n-k} \tag{27}
$$

$$
n\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} P_k \Sigma_{n-k} \tag{28}
$$

L'équation (28) est due à Isaac Newton, et connue sous le nom de formule de Newton. Étant donné (27), il est clair que $S_n \in \mathbb{Q}[P_1, \ldots, P_n]$ et $P_n \in \mathbb{Z}[S_1, \ldots, S_n]$, d'où $\mathbb{Q}[P_1, \ldots, P_n] = \mathbb{Q}[S_1, \ldots, S_n]$. Puisque les S_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$, et donc également sur $\mathbb{Q}$, il suit :

Proposition 10 *On a :*

$$
Sym_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Sym = \mathbb{Q}[P_1, P_2, \ldots]
$$

Les P_n sont de plus algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On note encore $P_\alpha = P_{a_1} \ldots P_{a_m}$ pour toute partition $\alpha = [a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_m]$. Ces éléments forment une $\mathbb{Q}$-base de $Sym_{\mathbb{Q}}$, mais pas une $\mathbb{Z}$-base de Sym : par exemple, $S_2 = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2)$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}[P_1, P_2, \ldots]$. Enfin, puisque l'involution ω interchange $\sigma(t)$ et $s(t)$, on a donc avec (27) et (28) :

$$
\omega(P_n) = (-1)^{n-1} P_n
$$

pour tout $n \geqslant 1$, et pour toute partition α :

$$
\omega(P_\alpha) = (-1)^{wt(\alpha) - lg(\alpha)} P_\alpha \tag{29}
$$

Remarque 11 - *En comparant les séries formelles (26) et (15) définissant les éléments P_n et Γ_n respectivement, on obtient $\Gamma_n = \frac{(-1)^n}{n} P_n$. On a ainsi identifié les éléments Γ_n comme fonctions symétriques. On obtient également que les fonctions P_n sont primitives pour la structure de cogèbre mise en place sur Sym.*

- *On a vu que les Σ_n sont algébriquement indépendants. Ainsi, toute série formelle $f(t) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} a_n t^n$ peut être considérée comme la spécialisation de la série $\sigma(t)$ pour un ensemble d'arguments A. Les spécialisations des autres familles de fonctions symétriques associées à $f(t)$ sont alors définies par (22) et (26)[2].*

On a muni Sym d'un coproduit défini par (12) au début de ce paragraphe. Regardons son action sur les bases $(S_n)_{n \geqslant 1}$ et $(P_n)_{n \geqslant 1}$ de l'algèbre des fonctions symétriques :

Proposition 12 *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$
\Delta(S_n) = \sum_{i+j=n} \Sigma_i \otimes \Sigma_j, \ \Delta(P_n) = P_n \otimes 1 + 1 \otimes P_n \tag{30}
$$

[2] voir la section 3 pour des exemples d'utilisations.

Démonstration : Pour la base des fonctions symétriques sommes de puissances, celà résulte du calcul fait pour les Γ_n. Pour la base $(S_n)_{n\geqslant 1}$, on procède par récurrence sur n. Pour $n=1$, c'est immédiat puisque $S_1=\Sigma_1$. Supposons la propriété pour tout $k\leqslant n-1$. Au rang n :

$$\begin{aligned}
n\Delta(S_n) &= \Delta\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_k P_{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\left(S_{k-i}P_{n-k}\otimes S_i + S_i\otimes S_{k-i}P_{n-k}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\left(S_{k-i}P_{n-k}\otimes S_i + S_i\otimes S_{k-i}P_{n-k}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\sum_{k=i}^{n-1} S_{k-i}P_{n-k}\right)\otimes S_i + S_i\otimes\left(\sum_{k=i}^{n-1} S_{k-i}P_{n-k}\right)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[(n-i)S_{n-i}\otimes S_i + S_i\otimes(n-i)S_{n-i}\right] = n\sum_{i=0}^{n} S_i\otimes S_{n-i}
\end{aligned}$$

On conclut par principe de récurrence.

□

D'autres propriétés de l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques seront données dans la suite. On s'intéresse à présent à deux généralisations de l'algèbre de Hopf *Sym* qui ont montré leur importance : l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques non commutatives *NSym* et l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques *QSym*.

1.2.2 Algèbre des fonctions symétriques non commutatives

Comme algèbre, *NSym* est simplement l'algèbre associative libre en une infinité dénombrable d'indéterminées sur $\mathbb{Z}$:

$$NSym = \mathbb{Z}\langle \Sigma_1, \Sigma_2, ...\rangle \tag{31}$$

Le coproduit est déterminé par :

$$\Delta(\Sigma_n) = \sum_{i+j=n} \Sigma_i\otimes\Sigma_j,\ \text{avec } \Sigma_0 = 1 \tag{32}$$

NSym étant une algèbre associative libre, Δ se prolonge de manière unique en un morphisme d'algèbres. Clairement, Δ est coassociatif, la counité est donnée par $\epsilon(1)=1$ et $\epsilon(\Sigma_n)=0$ si $n=1,2,\ldots$ Donc *NSym* est une bigèbre. Une base de *NSym* comme groupe abélien est donnée par l'ensemble des monômes :

$$\Sigma_\alpha = \Sigma_{a_1}\Sigma_{a_2}...\Sigma_{a_m} \text{ et } \Sigma_{[\,]} = 1$$

où α est une composition. *NSym* est graduée connexe en donnant à Σ_α le degré $wt(\alpha)$. C'est donc une algèbre de Hopf. Elle est non-commutative et cocommutative. Sa série formelle est :

$$F_{NSym}(h) = \frac{1-h}{1-2h} \tag{33}$$

Là aussi, les Σ_n peuvent être vu formellement comme des fonctions symétriques élémentaires en un ensemble d'indéterminées donné. Pour décrire l'antipode, on aura besoin de la notation suivante : si $\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_m]$ est une composition, α^t désignera la composition $\alpha^t = [a_m,\ldots,a_2,a_1]$.

Proposition 13 *S est l'unique anti-morphisme d'algèbres de NSym dans NSym, tel que pour tout $n \geqslant 1$:*

$$S(\Sigma_n) = \sum_{wt(\alpha)=n} (-1)^{lg(\alpha)} \Sigma_\alpha$$

On a de plus :

$$S(\Sigma_\alpha) = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha^t} (-1)^{lg(\beta)} \Sigma_\beta \tag{34}$$

Démonstration : La démonstration est semblable au cas de l'algèbre *Sym*.

□

Soit t une indéterminée supplémentaire, qui commute avec tous les Σ_n.

Définition 14 *Les fonctions symétriques élémentaires sont les Σ_n eux-mêmes, et leur série génératrice est :*

$$\sigma(t) = \sum_{n \geqslant 0} \Sigma_n t^n = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \Sigma_n t^n \tag{35}$$

Les fonctions symétriques homogènes complètes S_n sont définies par :

$$s(t) = \sum_{n \geqslant 0} S_n t^n = \sigma(-t)^{-1} \tag{36}$$

Les fonctions symétriques sommes de puissances P_n sont définies par :

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n \geqslant 1} P_n t^{n-1} \\ \frac{d}{dt} s(t) &= s(t) p(t) \end{aligned} \tag{37}$$

Remarque 15 *On aurait pu définir une autre famille de fonctions symétriques sommes de puissances en remplaçant (37) par :*

$$\frac{d}{dt} s(t) = p(t) s(t)$$

mais on obtient essentiellement les mêmes fonctions. En effet, NSym est munie de plusieurs involutions naturelles, et parmis elles l'anti-automorphisme qui laisse invariant les Σ_n. On note cette involution θ : NSym $\rightarrow$ NSym. Il suit de (36) que $\theta(S_n) = S_n$, et avec (37) :

$$\frac{d}{dt} s(t) = \theta(p(t)) s(t)$$

avec $\theta(p(t)) = \sum_{n \geqslant 1} \theta(P_n) t^{n-1}$.

Proposition 16 *On a :*

$$-\frac{d}{dt} \sigma(-t) = p(t) \sigma(-t) \tag{38}$$

Démonstration : En multipliant (37) à gauche et à droite par $\sigma(-t)$, on obtient :

$$\sigma(-t)\left(\frac{d}{dt}s(t)\right)\sigma(-t) = s(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}s(t)\right)s(t)^{-1} = p(t)\sigma(-t)$$

Or, on a :

$$s(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}s(t)\right)s(t)^{-1} = -\frac{d}{dt}s(t)^{-1} = -\frac{d}{dt}\sigma(-t)$$

.

□

Ces identités entre séries formelles fournissent les relations suivantes :

Proposition 17 *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S_k\Sigma_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\Sigma_k S_{n-k} = 0 \tag{39}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}S_k P_{n-k} = nS_n, \ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}P_{n-k}\Sigma_k = n\Sigma_n \tag{40}$$

Démonstration : La relation (39) est obtenue en considérant le coefficient de t^n dans $\sigma(-t)s(t) = s(t)\sigma(-t) = 1$. Les autres identités se démontrent de façon similaire grâce à (37) et à (38).

□

Il résulte de (39) et (40) que l'algèbre *NSym* est librement engendrée par les familles (Σ_n) et (S_n), et que $NSym_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} NSym$ est librement engendrée par (P_n). Ainsi, comme dans le cas commutatif, (Σ_n) et (S_n) forment des bases de la $\mathbb{Z}$-algèbre *NSym*, tandis que (P_n) est une base de la $\mathbb{Q}$-algèbre $NSym_{\mathbb{Q}}$

Définition 18 *Soit $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ une composition. On définit le produit des fonctions symétriques élémentaires :*

$$\Sigma_\alpha = \Sigma_{a_1}\Sigma_{a_2}\ldots\Sigma_{a_m}$$

De façon similaire, on a le produit des fonctions symétriques homogènes complètes :

$$S_\alpha = S_{a_1}S_{a_2}\ldots S_{a_m}$$

et le produit des fonctions symétriques sommes de puissances :

$$P_\alpha = P_{a_1}P_{a_2}\ldots P_{a_m}$$

Les familles (Σ_α) et (S_α) forment des $\mathbb{Z}$-bases du groupe abélien libre NSym.

Pour la graduation définie sur *NSym*, les éléments S_n et P_n sont homogènes de degré n, pour tout $n \geqslant 1$ (voir les formules (39) et (40)).

Proposition 19 *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$\Delta(S_n) = \sum_{i+j=n} S_i \otimes S_j \text{ et } \Delta(P_n) = P_n \otimes 1 + 1 \otimes P_n \tag{41}$$

Démonstration : On démontre la propriété pour les fonctions symétriques sommes de puissances, l'assertion concernant la base $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en résulte par une démonstration analogue à la proposition 12. On procède par récurrence sur n. Pour $n=1$, c'est immédiat puisque $P_1=\Sigma_1$. Supposons $n\geqslant 2$, et la propriété pour tout $k\leqslant n-1$. Au rang n :

$$\begin{aligned}
n\Delta(\Sigma_n) &= \Delta\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}P_{n-k}\Sigma_k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-k-1}\left(P_{n-k}\Sigma_{k-i}\otimes\Sigma_i+\Sigma_i\otimes P_{n-k}\Sigma_{k-i}\right)+(\Delta(P_n)-P_n\otimes 1-1\otimes P_n)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\sum_{k=i}^{n-1}(-1)^{n-k-1}P_{n-k}\Sigma_{k-i}\right)\otimes\Sigma_i+\Sigma_i\otimes\left(\sum_{k=i}^{n-1}(-1)^{n-k-1}P_{n-k}\Sigma_{k-i}\right)\right]\\
&\qquad\qquad +(\Delta(P_n)-P_n\otimes 1-1\otimes P_n)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[(n-i)\Sigma_{n-i}\otimes\Sigma_i+\Sigma_i\otimes(n-i)\Sigma_{n-i}\right]+(\Delta(P_n)-P_n\otimes 1-1\otimes P_n)\\
&= n\sum_{i=0}^{n}\Sigma_i\otimes\Sigma_{n-i}+(\Delta(P_n)-P_n\otimes 1-1\otimes P_n)
\end{aligned}$$

D'où $\Delta(P_n)=P_n\otimes 1+1\otimes P_n$. On conclut alors par principe de récurrence.

□

Corollaire 20 *On a :*

$$NSym_{\mathbb{Q}}\approx LieHopf_{\mathbb{Q}} \tag{42}$$

l'isomorphisme homogène d'algèbres de Hopf étant donné par $P_n\longrightarrow U_n$ pour tout $n\geqslant 0$.

On définit un anti-automorphisme ω de *NSym* en posant pour tout $n\geqslant 0$:

$$\omega(S_n)=\Sigma_n \tag{43}$$

Les formules (39) et (40) montrent que :

$$\omega(\Sigma_n)=S_n \text{ et } \omega(P_n)=(-1)^{n-1}P_n$$

En particulier, on voit que ω est une involution.

Proposition 21 *L'antipode de NSym est l'anti-automorphisme défini par :*

$$S(S_n)=(-1)^n\Sigma_n,\ n\geqslant 0 \tag{44}$$

Démonstration : Soit ϖ l'anti-automorphisme défini par $\varpi(S_n)=(-1)^n\Sigma_n$, $n\geqslant 0$. On a $\varpi(1)=1$, et pour tout $n\geqslant 1$:

$$m\circ(\varpi\otimes Id)\circ\Delta(S_n)=\sum_{k=0}^{n}\varpi(S_k)S_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Sigma_kS_{n-k}\overset{(39)}{=}0$$

ϖ est donc l'inverse à gauche de Id pour le produit de convolution, qui est associatif. Donc $\varpi=S$.

$\square$

Remarque 22 *On avait également obtenu la formule suivante pour l'antipode :*

$$S(S_\alpha) = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha^t} (-1)^{lg(\beta)} S_\beta$$

Corollaire 23 *On a :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{wt(\beta)=n} (-1)^{n-lg(\beta)} \Sigma_\beta \\ S_\alpha &= \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} (-1)^{wt(\alpha)-lg(\beta)} \Sigma_\beta \end{aligned} \tag{45}$$

Notons également qu'en appliquant ω à (45), on obtient :

$$\Sigma_\alpha = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} (-1)^{wt(\alpha)-lg(\beta)} S_\beta \tag{46}$$

Démonstration : *NSym* étant cocommutative, S est une involution, d'où :

$$S_n = S^2(S_n) = (-1)^n S(\Sigma_n) = \sum_{wt(\beta)=n} (-1)^{n+lg(\beta)} \Sigma_\beta$$

Les deux autres points s'en déduisent immédiatement.

$\square$

Proposition 24 *Pour $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$ une composition, on note $\pi(\alpha) = a_1(a_1 + a_2) \ldots (a_1 + \ldots + a_m)$. Si $\beta \succcurlyeq \alpha$, avec $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_m]$ où $wt(\beta_j) = a_j$, on note $\pi(\beta, \alpha) = \prod_{j=1}^{m} \pi(\beta_j)$. On a :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{wt(\beta)=n} \frac{1}{\pi(\beta)} P_\beta \\ S_\alpha &= \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} \frac{1}{\pi(\beta, \alpha)} P_\beta \end{aligned}$$

En appliquant ω, on obtient :

$$\Sigma_\alpha = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} \frac{(-1)^{wt(\alpha)-lg(\beta)}}{\pi(\beta^t, \alpha^t)} P_\beta$$

Démonstration : Montrons par récurrence sur n que $S_n = \sum_{wt(\beta)=n} \frac{1}{\pi(\beta)} P_\beta$. La propriété est vraie au rang $n = 1$, puisque $S_1 = P_1$. Supposons $n \geqslant 2$, et la propriété vraie pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &\overset{(40)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} S_k P_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\sum_{wt(\beta)=k} \frac{1}{\pi(\beta)} P_\beta \right) P_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{wt(\beta)=k} \frac{1}{n\pi(\beta)} P_{\beta\star[n-k]} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{wt(\beta)=k} \frac{1}{\pi(\beta \star [n-k])} P_{\beta\star[n-k]} = \sum_{wt(\beta)=n} \frac{1}{\pi(\beta)} P_\beta \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang n. On conclut par principe de récurrence. Les deux autres points s'en déduisent alors directement.

$\square$

On termine ce paragraphe en introduisant une dernière base du groupe abélien libre *NSym*, constituée des fonctions de Schur :

$$R_\alpha = \sum_{\alpha \succcurlyeq \beta} (-1)^{lg(\alpha)-lg(\beta)} S_\beta \tag{47}$$

On obtient bien une base du groupe abélien libre *NSym* : en effet, dans la somme (47), il y a un unique monôme indexé par une composition de longueur $lg(\alpha)$, cette composition étant précisément α. Comme de plus, (S_α) est une base du groupe abélien libre *NSym*, il en est de même pour la famille (R_α). Notons que $S_n = R_n$, et que $R_{[1^n]} = \sum_{[1^n] \succcurlyeq \beta} (-1)^{n-lg(\beta)} S_\beta = \sum_{\beta \succcurlyeq [n]} (-1)^{n-lg(\beta)} S_\beta = \Sigma_n$. R_α est homogène de degré $wt(\alpha)$. On a de plus la formule suivante pour le produit des fonctions de Schur[3] :

Proposition 25 *Soient* $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$ *et* $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$ *deux compositions. Alors :*

$$R_{[a_1,\ldots,a_m]} R_{[b_1,\ldots,b_n]} = R_{[a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n]} + R_{[a_1,\ldots,a_m+b_1,\ldots,b_n]} \tag{48}$$

En particulier, le produit d'une fonction élémentaire par une fonction complète est donné par :

$$\Sigma_m S_n = R_{[1^m,n]} + R_{[1^{m-1},n+1]}$$

On a également pour tout $n \geqslant 1$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k R_{[1^k,n-k]}$$

En effet, l'identité $\sigma(-t)\dfrac{d}{dt}s(t) = p(t)$ implique :

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k) \Sigma_k S_{n-k} = nR_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (n-k) \left[R_{[1^k,n-k]} + R_{[1^{k-1},n-k+1]} \right] \\
&= nR_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (n-k) R_{[1^k,n-k]} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+1} (n-k-1) R_{[1^k,n-k]} \\
&= nR_n + (-1)^{n-1} R_{[1^{n-1},1]} - (n-1)R_n + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k R_{[1^k,n-k]} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k R_{[1^k,n-k]}
\end{aligned}$$

1.2.3 Algèbre des fonctions quasi-symétriques

Soit $X = \{x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\}$ un ensemble infini totalement ordonné de variables qui commutent, et $\mathbb{Z}[[X]]$ l'anneau commutatif des séries formelles en ces variables sur $\mathbb{Z}$. Rappelons qu'un élement $F = F(x)$ de degré fini de $\mathbb{Z}[[X]]$ est une *fonction symétrique* si quelque soit $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k$ dans X, les y_i étant pris deux à deux distincts, tout comme les z_j, et pour tout choix d'entiers positifs non-nuls $a_1, \ldots, a_k$, les monômes $y_1^{a_1} \ldots y_k^{a_k}$ et $z_1^{a_1} \ldots z_k^{a_k}$ apparaissent

[3] voir [1] pour une démonstration

avec les mêmes coefficients dans F. Un élement $F = F(x)$ de degré fini de $\mathbb{Z}[[X]]$ est une *fonction quasi-symétrique* si F satisfait la condition plus faible suivante : quelque soit $y_1 < \ldots < y_k$ et $z_1 < \ldots < z_k$ dans X, et pour tout choix d'entiers positifs non-nuls $a_1, \ldots, a_k$, les monômes $y_1^{a_1} \ldots y_k^{a_k}$ et $z_1^{a_1} \ldots z_k^{a_k}$ apparaissent avec les mêmes coefficients dans F.

On note $QSym = QSym(x)$ l'ensemble des fonctions quasi-symétriques. C'est une sous-algèbre de $\mathbb{Z}[[X]]$, et *Sym* est une sous-algèbre de *QSym*. *Sym* et *QSym* héritent de la graduation naturelle de l'algèbre $\mathbb{Z}[[X]]$.

L'algèbre *QSym* est un $\mathbb{Z}$-module libre, de base la famille (M_α) indexée par les compositions, où les M_α sont définis par :

$$M_\alpha = \sum_{y_1 < \ldots < y_k} y_1^{a_1} \ldots y_k^{a_k} \tag{49}$$

Une autre base de *QSym*, introduite par Gessel, jouera un rôle intéressant dans la suite. Elle est constituée des fonctions :

$$F_\alpha = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} M_\beta \tag{50}$$

Par exemple, $F_{[1,1,1]} = M_{[1,1,1]}$, $F_{[3]} = M_{[3]} + M_{[2,1]} + M_{[1,2]} + M_{[1,1,1]}$, $F_{[1,2]} = M_{[1,2]} + M_{[1,1,1]}$.

On souhaite décrire de manière plus explicite le produit dans *QSym*. Pour cela, il nous faut définir le produit de quasi-battage (ou quasi-shuffle) de deux compositions $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ et $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$: Pour tout $k \leqslant min(m,n)$, prenons un mot ayant $m+n-k$ entrées vides. Parmis celles-ci, on en choisit m où l'on y place les lettres composant le mot α dans leur ordre initial. On choisit à présent k entrées parmis les m qu'on vient de remplir. Avec les $n-k$ entrées encore vides, on a donc n entrées, dans lesquelles on va placer les lettres composant β dans leur ordre initial. Enfin, pour les k entrées qui contiennent une lettre du mot α et une du mot β, on additionne ces deux lettres. Le produit de quasi-battage de α et β, $\alpha \times_{qsh} \beta$, est la somme de toutes les compositions que l'on peut ainsi obtenir. Quelques exemples ne seront pas de trop :

$$[2] \times_{qsh} [1,5,3] = [2,1,5,3] + [1,2,5,3] + [1,5,2,3] + [1,5,3,2] + [3,5,3] + [1,7,3] + [1,5,5]$$
$$[2] \times_{qsh} [2,2,3] = 3[2,2,2,3] + [2,2,3,2] + [4,2,3] + [2,4,3] + [2,2,5]$$
$$[1,1] \times_{qsh} [1,1] = 6[1,1,1,1] + 2[1,1,2] + 2[1,2,1] + 2[2,1,1] + [2,2]$$

Par définition de $\times_{qsh}$, le produit de quasi-battage est commutatif.

On décrit à présent le produit dans *QSym* :

$$m(M_\alpha \otimes M_\beta) = M_\alpha(x) M_\beta(x) = \left(\sum_{y_1 < \ldots < y_m} y_1^{a_1} \ldots y_m^{a_m} \right) \left(\sum_{z_1 < \ldots < z_n} z_1^{b_1} \ldots z_n^{z_n} \right)$$

D'où, si par exemple $m < n$:

$$\begin{aligned} m(M_\alpha \otimes M_\beta) \quad = \quad & \sum_{y_1 < \ldots < y_m < z_1 < \ldots < z_n} y_1^{a_1} \ldots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \ldots z_n^{b_n} \\ & + \sum_{y_1 < \ldots < y_{m-1} < z_1 < y_m < \ldots < z_n} y_1^{a_1} \ldots y_{m-1}^{a_{m-1}} z_1^{b_1} y_m^{a_m} z_2^{b_2} \ldots z_n^{b_n} \\ & + \ldots + \sum_{y_1 < \ldots < y_m = z_1 < \ldots < z_n} y_1^{a_1} \ldots y_m^{a_m + b_1} \ldots z_n^{b_n} \\ & + \ldots + \sum_{y_1 = z_1 < \ldots < y_m = z_m < \ldots < y_n} y_1^{a_1 + b_1} \ldots y_m^{a_m + b_m} \ldots z_n^{b_n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$m(M_\alpha \otimes M_\beta) = M_{\alpha \times_{qsh} \beta} \tag{51}$$

avec la convention $M_{\alpha+\beta} = M_\alpha + M_\beta$. En particulier, *QSym* est une algèbre commutative.

Si Y est un autre ensemble infini dénombrable totalement ordonné de variables qui commutent, on identifiera $QSym(x)$ et $QSym(y)$, $Sym(x)$ et $Sym(y)$. En effet, l'application qui envoie $M_\alpha(x)$ sur $M_\alpha(y)$ pour toute composition α, est un isomorphisme d'algèbres.

Dès lors, il est possible de définir pour toute fonction quasi-symétrique F, la fonction quasi-symétrique $F(x, y)$ en l'ensemble des variables $X \cup Y$, $X \cup Y$ étant totalement ordonné par l'ordre sur X et sur Y et par :

$$x < y \text{ si } x \in X, y \in Y$$

Ainsi, on peut écrire :

$$F(x, y) = \sum_i F_i(x) G_i(y) \tag{52}$$

ce qui définit le coproduit :

$$\begin{array}{cccc} \Delta: & QSym & \longrightarrow & QSym \otimes QSym \\ & F & \mapsto & \Delta(F) = \sum_i F_i \otimes G_i \end{array} \tag{53}$$

Ce coproduit est coassociatif : en effet, si $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$ est une composition :

$$\begin{aligned} M_\alpha(x,y) &= \sum_{i_1 < \ldots < i_m} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_m}^{a_m} + \sum_{i_1 < \ldots < i_{m-1}, j_m} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_{m-1}}^{a_{m-1}} y_{j_m}^{a_m} + \ldots + \sum_{j_1 < \ldots < j_m} y_{j_1}^{a_1} \ldots y_{j_m}^{a_m} \\ &= \sum_{i=0}^{m} M_{[a_1,\ldots,a_i]}(x) M_{[a_{i+1},\ldots,a_m]}(y) \end{aligned}$$

avec la convention $M_{[\ ]} = 1$. D'où :

$$\Delta(M_\alpha) = \sum_{i=0}^{m} M_{[a_1,\ldots,a_i]} \otimes M_{[a_{i+1},\ldots,a_m]} = \sum_{\alpha = \alpha' \star \alpha''} M_{\alpha'} \otimes M_{\alpha''} \tag{54}$$

On reconnait ici le coproduit de déconcaténation. Ainsi Δ est coassociatif, et la counité est donnée de facon immédiate par $\varepsilon(F) =$ le terme constant de F.

On montrera dans la section suivante que le $\mathbb{Z}$-module libre *QSym*, muni du produit et du coproduit qu'on vient de définir, est une bigèbre. Elle est de plus graduée connexe, avec M_α et F_α homogènes de degré $wt(\alpha)$, les composantes homogènes étant de rang fini. C'est donc une algèbre de Hopf graduée connexe, commutative et non cocommutative. On donnera également d'autres propriétés de *QSym*.

1.2.4 Liens entre les algèbres de Hopf *Sym*, *NSym* et *QSym*

On détermine maintenant les différents liens existant entre les algèbres de Hopf *Sym*, *NSym* et *QSym*. En particulier, nous avions motivé la définition de *NSym* et *QSym* en expliquant que ces algèbres généralisent l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques. On précise tout ceci dans cette section.

Dual gradué des algèbres de Hopf NSym et QSym :

On a défini sur $QSym$ une structure d'algèbre graduée connexe commutative, ainsi qu'un coproduit coassociatif Δ. Son dual gradué $QSym^*$ est donc muni d'une structure de cogèbre graduée connexe cocommutative, et d'une structure d'algèbre associative. On note (M_α^*) la base duale de (M_α).

Proposition 26 *Comme algèbre associative, $QSym^*$ est librement engendrée par les éléments $M_n^*, n \geqslant 1$.*

Démonstration : C'est une conséquence directe de l'identité :

$$M_\alpha^* = M_{\alpha'}^* M_{\alpha''}^* \tag{55}$$

pour toutes compositions α, α', α'' telles que $\alpha = \alpha' \star \alpha''$, le produit étant la concaténation des mots. Par dualité, (55) est équivalente à :

$$\Delta(M_\alpha) = \sum_{\alpha=\alpha'\star\alpha''} M_{\alpha'} \otimes M_{\alpha''}$$

Or, c'est précisément l'expression du coproduit (54). Ce qui prouve (55). Comme de plus (M_α^*) est une base du $\mathbb{Z}$-module libre $QSym^*$, les éléments M_n^*, $n \geqslant 1$, engendrent librement $QSym^*$.

□

On définit alors l'isomorphisme d'algèbres :

$$\varphi : QSym^* \to NSym,\ M_n^* \mapsto S_n \tag{56}$$

Par la proposition précédente, φ est bien définie. Elle est de plus homogène de degré 0.

Théorème 27
1. *$\varphi : (QSym^*, m_{QSym}^*) \longrightarrow (NSym, \Delta_{NSym})$ est un isomorphisme de cogèbres homogène de degré 0.*
2. *QSym est une algèbre de Hopf graduée connexe, commutative et non cocommutative. Son dual gradué $QSym^*$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf NSym.*

Démonstration : Commençons par montrer que φ est un isomorphisme de cogèbres. Il suffit pour cela d'établir :

$$\Delta(M_n^*) = \sum_{k+l=n} M_k^* \otimes M_l^*$$

pour tout $n \geqslant 1$. Par dualité, il est équivalent de montrer que, dans le produit $M_{\alpha'} M_{\alpha''}$ écrit dans la base (M_α), l'élément M_n apparait si et seulement si $\alpha' = [k]$, $\alpha'' = [l]$, et $n = k + l$, et dans ce cas avec pour coefficient 1. Or, on a vu que :

$$M_{\alpha'} M_{\alpha''} = M_{\alpha' \times_{qsh} \alpha''}$$

Mais étant donné la description faite du produit $\alpha' \times_{qsh} \alpha''$ de deux compositions, il est clair que le mot $[n]$ apparait dans ce produit si et seulement si $\alpha' = [k]$, $\alpha'' = [l]$, et $n = k + l$, avec de plus un coefficient égal à 1.

Finalement, φ est un isomorphisme d'algèbres et de cogèbres entre $QSym^*$ et $NSym$. Comme Δ_{NSym} et ε_{NSym} sont des morphismes d'algèbres, il en est de même de Δ_{QSym^*} et ε_{QSym^*}. Ainsi, $QSym^*$ et son dual gradué $QSym$ sont des bigèbres graduées connexes, donc des algèbres de Hopf. Enfin, $\varphi : QSym^* \to NSym$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

$\square$

On définit alors la forme bilinéaire $\langle ., . \rangle : QSym \times NSym \longrightarrow \mathbb{Z}$ par :

$$\langle M_\alpha, S_\beta \rangle = \varphi^{-1}(S_\beta)(M_\alpha) \tag{57}$$

pour toutes compositions α et β.

Théorème 28 *Ainsi défini, $\langle ., . \rangle$ est un crochet de Hopf entre QSym et NSym, i.e.* (57) *est une forme bilinéaire non dégénérée, qui satisfait :*

- *Si* $wt(\alpha) \neq wt(\beta)$, $\langle M_\alpha, S_\beta \rangle = 0$.
- $\langle m_{QSym}(M_\alpha \otimes M_{\alpha'}), S_\beta \rangle = \langle M_\alpha \otimes M_{\alpha'}, \Delta_{NSym}(S_\beta) \rangle$.
- $\langle \Delta_{QSym}(M_\alpha), S_\beta \otimes S_{\beta'} \rangle = \langle M_\alpha, m_{NSym}(S_\beta \otimes S_{\beta'}) \rangle$.

De plus, on a :

$$\langle M_\alpha, S_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \tag{58}$$

pour toutes compositions α et β.

Démonstration : Il suffit de démontrer (58), puisque les autres propriétés découlent directement du fait que $\varphi : QSym^* \longrightarrow NSym$ soit un isomorphisme d'algèbres de Hopf homogène de degré 0. Soient donc α et $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$ deux compositions :

$$\begin{aligned}
\langle M_\alpha, S_\beta \rangle &= \varphi^{-1}(S_\beta)(M_\alpha) = (M^*_{b_1} \ldots M^*_{b_n})(M_\alpha) \\
&= (M^*_{b_1} \otimes \ldots \otimes M^*_{b_n}) \left(\Delta^{(n-1)}_{QSym}(M_\alpha) \right) \\
&= (M^*_{b_1} \otimes \ldots \otimes M^*_{b_n}) \left(\sum_{\alpha_1 \star \ldots \star \alpha_n} M_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes M_{\alpha_n} \right) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 29 *Pour ce crochet, les fonctions F_α et les fonctions de Schur R_β sont duales :*

$$\langle F_\alpha, R_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \tag{59}$$

Démonstration : Considérons $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ et $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ deux compositions. On a :

$$\begin{aligned}
\langle F_\alpha, R_\beta \rangle &= \sum_{\alpha' \succcurlyeq \alpha} \sum_{\beta \succcurlyeq \beta'} (-1)^{lg(\beta) - lg(\beta')} \langle M_{\alpha'}, S_{\beta'} \rangle \\
&= \sum_{\alpha' \succcurlyeq \alpha} \sum_{\beta \succcurlyeq \beta'} (-1)^{lg(\beta) - lg(\beta')} \delta_{\alpha',\beta'}
\end{aligned}$$

Si β n'est pas un raffinement de α, alors $\langle F_\alpha, R_\beta \rangle = 0$. Supposons à présent que $\beta \succcurlyeq \alpha$. On note $k = lg(\beta) - lg(\alpha)$. Si $k = 0$, alors $\beta = \alpha$ et $\sum_{\alpha' \succcurlyeq \alpha} \sum_{\beta \succcurlyeq \beta'} (-1)^{lg(\beta)-lg(\beta')} \delta_{\alpha',\beta'} = \delta_{\alpha,\beta} = 1$. Montrons par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, $\langle F_\alpha, R_\beta \rangle = 0$:

- Si $k = 1$, alors β est de la forme $\beta = [a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, b_{i+1}, a_{i+1}, \ldots, a_m]$, avec $b_i + b_{i+1} = a_i$. Dans ce cas : $\langle F_\alpha, R_\beta \rangle = (-1)^{lg(\beta)-lg(\beta)} \delta_{\beta,\beta} + (-1)^{lg(\beta)-lg(\alpha)} \delta_{\alpha,\alpha} = 1 - 1 = 0$.

- Supposons la propriété au rang $k-1 \geqslant 1$. Au rang k :

$$\begin{aligned}
\langle F_\alpha, R_\beta \rangle &= \sum_{\beta \succcurlyeq \beta',\ lg(\beta')=m-1} \left(\sum_{\alpha' \succcurlyeq \alpha} \sum_{\beta' \succcurlyeq \beta''} \langle M_{\alpha'}, S_{\beta''} \rangle \right) \\
&= \sum_{\beta \succcurlyeq \beta',\ lg(\beta')=m-1} \underbrace{\langle F_\alpha, R_{\beta'} \rangle}_{=0 \text{ par H.R.}} = 0
\end{aligned}$$

d'où la propriété au rang k. On conclut par principe de récurrence.

$\square$

En particulier, on déduit des résultats précédents la série formelle de $QSym$:

$$F_{QSym}(h) = \frac{1-h}{1-2h} \tag{60}$$

On donne à présent plusieurs corollaires de ces résultats.

Corollaire 30 *Il existe une base de la $\mathbb{Q}$-algèbre commutative $QSym_{\mathbb{Q}}$ contenant un sous-ensemble qui engendre librement $Sym_{\mathbb{Q}}$. En particulier, $QSym_{\mathbb{Q}}$ est une algèbre commutative libre, et un module libre sur $Sym_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration : Rappelons que si $\mathbb{Q}\langle T\rangle$ désigne la $\mathbb{Q}$-algèbre associative libre engendrée par T un ensemble totalement ordonné, avec pour coproduit $\Delta(t) = t\otimes 1 + 1\otimes t$, alors son dual gradué est une algèbre commutative libre. Une base de cette algèbre est obtenue comme suit : Soit $M(T)$ la base de $\mathbb{Q}\langle T\rangle$ (en tant qu'espace vectoriel) formée de l'ensemble des mots en l'alphabet T. Notons $L(T)$ l'ensemble des mots de Lyndon en T, et $L(T)^*$ le sous-ensemble de la base duale $M(T)^*$ correspondant à $L(T)$. Alors $L(T)^*$ engendre librement le dual de $\mathbb{Q}\langle T\rangle$[4].
Dans ce qui suit, on prend naturellement $T = \{P_n, n \geqslant 1\}$. On a l'isomorphisme d'algèbres de Hopf $NSym_{\mathbb{Q}} \approx LieHopf_{\mathbb{Q}}$ (corollaire 20). De plus, $M(T) = \{P_\alpha, \alpha\}$ est une base de $NSym_{\mathbb{Q}}$. On note $\{P_\alpha^*, \alpha\}$ la base duale correspondante de $QSym_{\mathbb{Q}}$, définie par $\langle P_\alpha^*, P_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$. Soit L l'ensemble des compositions de Lyndon, alors $\{P_\alpha^*, \alpha \in L\}$ engendre librement l'algèbre $QSym_{\mathbb{Q}}$. Or rappelons que :

$$S_\beta = \sum_{\alpha \succcurlyeq \beta} \frac{1}{\pi(\alpha,\beta)} P_\alpha$$

Par dualité, on obtient :

$$P_\alpha^* = \sum_{\alpha \succcurlyeq \beta} \frac{1}{\pi(\alpha,\beta)} M_\beta$$

En effet, si on note $P_\alpha^* = \sum_\beta c_{\alpha,\beta} M_\beta$, on a :

$$c_{\alpha,\beta} = \langle P_\alpha^*, S_\beta\rangle = \sum_{\gamma \succcurlyeq \beta} \frac{1}{\pi(\gamma,\beta)} \langle P_\alpha^*, P_\gamma\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(\alpha,\beta)} & \text{si } \alpha \succcurlyeq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, pour le mot de Lyndon $\alpha = [n]$, on obtient :

$$P_n^* = \frac{1}{n} M_n = \frac{1}{n} \sum_{i \geqslant 1} x_i^n$$

Or, on a vu que les fonctions sommes de puissances engendrent librement $Sym_{\mathbb{Q}}$, ce qui termine la démonstration.

[4]voir [11] Théorème 6.1 p125.

□

Corollaire 31 *L'antipode dans QSym est donné par la formule :*

$$S_{QSym}(M_\alpha) = \sum_{\alpha \succcurlyeq \beta} (-1)^{lg(\alpha)} M_{\beta^t} \tag{61}$$

Démonstration : Rappelons que l'on avait montré :

$$S_{NSym}(S_{\alpha^t}) = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} (-1)^{lg(\beta)} S_\beta$$

Le résultat s'en déduit par dualité.

□

Remarque 32 *On peut également montrer*[5] *que :*

$$S_{QSym}(F_\alpha) = (-1)^{lg(\alpha)} F_{\omega(\alpha)}$$

où $\omega(\alpha)$ est défini comme suit : Si $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ est une composition, on note $I(\alpha)$ le sous-ensemble de $\{1, \ldots, wt(\alpha)-1\}$ défini par : $I(\alpha) = \{a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}\}$. De façon similaire, on définit $I^t(\alpha) = I(\alpha^t) = \{a_2 + \ldots + a_m, \ldots, a_{m-1} + a_m, a_m\} \subset \{1, \ldots, wt(\alpha) - 1\}$. $\omega(\alpha)$ est alors l'unique composition de même poids que α et telle que $I(\alpha)$ et $I^t(\omega(\alpha))$ soient des sous-ensembles complémentaires de $\{1, \ldots, wt(\alpha) - 1\}$. Par exemple : si $\alpha = [2, 1, 3, 2, 1]$, alors $I(\alpha) = \{2, 3, 6, 8\} \subset \{1, 2, \ldots, 8\}$, $I^t(\omega(\alpha)) = \{7, 5, 4, 1\}$ et $\omega(\alpha) = [2, 2, 1, 3, 1]$. On note ω l'application linéaire de QSym définie par $\omega(F_\alpha) = F_{\omega(\alpha)}$.

Corollaire 33 *L'application ω est un automorphisme de l'algèbre QSym, qui prolonge la conjugaison usuelle des fonctions symétriques* (24).

Démonstration : On a $\omega(F_\alpha) = (-1)^{wt(\alpha)} S_{QSym}(F_\alpha)$, donc ω est un automorphisme d'algèbres. De plus, $\omega(F_{[n]}) = F_{[1^n]}$, soit avec les notations qu'on a pu introduire dans la section 1.2.1 : $\omega(S_n) = \Sigma_n$, ce qui prouve la seconde assertion.

□

Injection d'algèbres de Hopf $Sym \hookrightarrow QSym$:

On a défini $QSym = QSym(x)$ comme la sous-algèbre de $\mathbb{Z}[[X]]$ formée des fonctions quasi-symétriques. L'ensemble des fonctions symétriques *Sym* est une sous-algèbre de *QSym*. De plus, on a pu observer que $F_{[n]} = S_n$ et $F_{[1^n]} = M_{[1^n]} = \Sigma_n$ fonction symétrique élémentaire d'ordre n.

Proposition 34 *Sym est une sous-algèbre de Hopf graduée de QSym.*

Démonstration : Sym étant engendrée par des éléments homogènes, c'est un sous-espace gradué de *QSym*. On montre que c'est une sous-algèbre de Hopf :

$$\Delta_{QSym}(\Sigma_n) = \Delta_{QSym}(M_{[1^n]}) \overset{(54)}{=} \sum_{k=0}^{n} M_{[1^k]} \otimes M_{[1^{n-k}]} = \sum_{k=0}^{n} \Sigma_k \otimes \Sigma_{n-k}$$

De plus $\varepsilon_{QSym}(\Sigma_n) = 0$ pour $n \geqslant 1$. Reste à montrer $S_{QSym}(Sym) \subset Sym$. On peut le regarder directement, mais cela résulte aussi du premier point du lemme suivant, ce qui termine la démonstration.

[5]voir [9] corollaire 2-3.

$\square$

Lemme 35 *(i) Soient A et B deux algèbres de Hopf, $A \subset B$. On suppose de plus que A est une sous-bigèbre de B. Alors A est une sous-algèbre de Hopf de B, soit $S^B_{|A} = S^A$*

(ii) Soit I un biidéal gradué (idéal et coidéal) d'une algèbre de Hopf graduée connexe A. Alors, I est un idéal de Hopf, i.e. $S^A(I) \subset I$.

Démonstration : Pour (i), considérons $i : A \hookrightarrow B$ l'injection canonique. Puisque A est une sous-bigèbre de B, i est un morphisme de bigèbres, donc d'algèbres de Hopf. En particulier, $S^A = S^B \circ i$.
Pour (ii), on utilise un argument similaire : considérons $p : A \to A/I$ la surjection canonique. A/I étant une bigèbre graduée connexe, c'est une algèbre de Hopf. Et p est un morphisme de bigèbres, donc d'algèbres de Hopf. En particulier, $S^{A/I} \circ p = p \circ S^A$ et $S^A(I) \subset I$.

$\square$

Surjections d'algèbres de Hopf $\;NSym \twoheadrightarrow Sym$:

Lemme 36 *Soit H une algèbre de Hopf graduée, I l'idéal engendré par les commutateurs $[x,y] = xy - yx$, $x, y \in H$. I est un idéal de Hopf gradué, et $H_{ab} = H/I$ est une algèbre de Hopf graduée commutative, appelée abéliannisée de H.*

Démonstration : Montrons que I est un idéal de Hopf. Pour tout $x, y \in H$:

$$\begin{aligned}
\Delta([x,y]) &= \Delta(xy - yx) = \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\
&= \sum_x \sum_y x^{(1)}y^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)} - y^{(1)}x^{(1)} \otimes y^{(2)}x^{(2)} \\
&= \sum_x \sum_y (x^{(1)}y^{(1)} - y^{(1)}x^{(1)}) \otimes x^{(2)}y^{(2)} + y^{(1)}x^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)} - y^{(2)}x^{(2)} \\
&\in I \otimes H + H \otimes I
\end{aligned}$$

Notons V l'espace vectoriel engendré par les commutateurs. Alors $I = HVH$, et pour tout $h, h' \in H$, pour tout $v \in V$, $\Delta(hvh') = \Delta(h)\Delta(v)\Delta(h') \in (H \otimes H)(I \otimes H + H \otimes I)(H \otimes H) \subset I \otimes H + H \otimes I$.
Comme de plus $\varepsilon([x,y]) = 0$ et $S([x,y]) = [S(y), S(x)] \in I$, on a donc $\varepsilon(I) = (0)$ et $S(I) \subset I$. I est donc un idéal de Hopf. Par bilinéarité, I est engendré par les éléments $[x,y]$ où x, y sont des éléments homogènes de V. Un tel élément est homogène de degré $deg(x) + deg(y)$. Comme I est engendré par des éléments homogènes, il est gradué. H_{ab} hérite donc d'une structure d'algèbre de Hopf graduée, clairement commutative.

$\square$

Théorème 37 *$NSym_{ab} = Sym$. Ainsi, on dispose d'une surjection d'algèbres de Hopf $NSym \twoheadrightarrow Sym$, homogène de degré* 0.

Démonstration : Soit $(\Sigma_i)_{i \geqslant 1}$ une famille d'indéterminées, et V le $\mathbb{Z}$-module libre en les Σ_i. Comme algèbres, $NSym = T(V)$ et $Sym = S(V)$. Or, $S(V)$ est définie comme le quotient de $T(V)$ par l'idéal engendré par les commutateurs. D'où immédiatement le résultat, puisque le coproduit et la counité dans $NSym_{ab}$ et dans $Sym = S(V)$ coïncident sur les indéterminées Σ_i.

$\square$

On dispose de l'injection *Sym* $\hookrightarrow$ *QSym*. Par passage au dual, on obtient donc un morphisme d'algèbres de Hopf homogène (de degré 0) surjectif ψ : *NSym* $\twoheadrightarrow$ *Sym**. *Sym** étant commutative, ce morphisme se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd} NSym \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[dr] & Sym^* \\ & NSym_{ab} = Sym \arrow[u, dashed, two heads, "\varphi"'] \end{tikzcd} \tag{62}$$

où φ est un morphisme d'algèbres de Hopf surjectif, homogène de degré 0. Comme de plus les séries de Poincaré-Hilbert de *Sym* et *Sym** sont égales, φ est un isomorphisme. D'où le :

Théorème 38 *L'algèbre de Hopf Sym est autoduale.*

Question : Expliciter ψ, que l'on a défini comme dual de l'injection i : $Sym \hookrightarrow QSym, S_n \mapsto F_{[n]}$.

2 Algèbres de Hopf d'endomorphismes d'algèbres de Hopf

2.1 Algèbres de Hopf des permutations et endomorphismes d'algèbres de Hopf

2.1.1 Algèbre de Hopf des permutations

On définit l'algèbre de Hopf des permutations *MPR*, introduite et étudiée par Malvenuto, Poirier et Reutenauer. *MPR* est le groupe abélien libre de base la permutation vide et toutes les permutations à n lettres, $n = 1, 2, \ldots$ Ainsi :

$$MPR = \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}S_n \tag{63}$$

où S_n est le groupe symétrique à n lettres. $\mathbb{Z}S_n$ est le sous-module des éléments homogènes de degré n, la permutation vide étant homogène de degré 0.
Les permutations de m lettres seront notées ainsi : à un mot $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ en l'alphabet $\{1, 2, \ldots, m\}$ sans répétition, on lui associe la permutation $\sigma : i \mapsto a_i$, $i = 1, \ldots, m$. La permutation vide est associée au mot vide [ ].

Multiplication dans MPR : On décrit le produit dans *MPR*. La permutation vide sert d'unité, et si $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ et $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ sont deux permutations, leur produit est donné par :

$$m(\alpha \otimes \beta) = [a_1, a_2, \ldots, a_m] \times_{Sh} [m + b_1, m + b_2, \ldots, m + b_n] \tag{64}$$

où $\times_{Sh}$ désigne le produit de battage introduit à la section précédente. Rappelons que le produit de battage de deux compositions $[c_1, c_2, \ldots, c_p] \times_{Sh} [d_1, d_2, \ldots, d_q]$ est la somme de toutes les permutations de $[c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_q]$, avec multiplicité, pour lesquelles les lettres de chacune des deux compositions apparaissent dans leur ordre initial. Par exemple, $[3] \times_{Sh} [1, 2, 4] = [3, 1, 2, 4] + [1, 3, 2, 4] + [1, 2, 3, 4] + [1, 2, 4, 3]$ et $[1] \times_{Sh} [1, 2] = 2[1, 1, 2] + [1, 2, 1]$. De part l'ajout de m à chaque lettre de la deuxième composition dans (64), on notera que $m(\alpha \otimes \beta)$ est une somme de permutations sans multiplicité.

Coproduit dans MPR : Pour décrire le coproduit dans *MPR*, il est nécessaire d'introduire la notion de standardisation. Soit $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ une composition sans répétition, i.e. telle que chaque entier naturel non-nul apparait au plus une fois dans le mot α. Sa standardisation est donnée par la permutation $st(\alpha) = [\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_m)]$, où $\varphi : \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \to \{1, \ldots, m\}$ est l'unique application qui préserve l'ordre entre les deux ensembles ordonnés $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ et $\{1, \ldots, m\}$. Par exemple, $st([5, 2, 1, 8]) = [3, 2, 1, 4]$.

Le coproduit dans *MPR* peut maintenant être défini par :

$$\Delta(\alpha) = \sum_{\alpha' \star \alpha'' = \alpha} st(\alpha') \otimes st(\alpha'') \tag{65}$$

où la somme est prise sur toutes les coupes de α, i.e. l'ensemble des paires (α', α'') dont la concaténation $\alpha' \star \alpha''$ est égale à α.

Théorème 39 *Avec* $1 = [\ ]$ *comme unité, et la counité* ε *définie par* $\varepsilon(\mathbb{Z}S_n) = (0)$ *et* $\varepsilon([\ ]) = 1$, *MPR est une algèbre de Hopf graduée connexe, non commutative et non cocommutative.*

Démonstration : Pour démontrer ce résultat, il nous faut introduire et rappeler certaines notations. On continue de noter m_{Sh} et Δ_{Sh} les produits et coproduits dans l'algèbre de Hopf *Shuffle*. Rappelons qu'ils sont donnés par :

$$m_{Sh}(\beta \otimes \beta') = \beta \times_{Sh} \beta'$$

$$\Delta_{Sh}(\beta) = \sum_{\beta' \star \beta'' = \beta} \beta' \otimes \beta''$$

On peut réécrire (64) et (65) de la façon suivante :

$$m(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times_{Sh} \overline{\beta} \tag{66}$$

$$\Delta = (st \otimes st) \circ \Delta_{Sh} \tag{67}$$

où $\overline{\beta}$ est la composition obtenue à partir de β en remplaçant chaque lettre i par $i + lg(\alpha)$, et où st est étendue par linéarité. Il est clair que Δ est coassociatif, de counité ε. Il faut donc montrer que Δ est un morphisme d'algèbres.

Commençons par noter que si α et β sont deux compositions sans répétition, et si toutes les lettres de α sont strictement inférieures à celles de β, alors :

$$m(st(\alpha) \otimes st(\beta)) = st(\alpha \times_{Sh} \beta) \tag{68}$$

Puisque Δ_{Sh} est un morphisme pour $\times_{Sh}$, on a pour toutes permutations α et β :

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha\otimes\beta) &= \Delta(\alpha\times_{Sh}\overline{\beta}) = (st\otimes st)\circ\Delta_{Sh}(\alpha\times_{Sh}\overline{\beta})\\
&= (st\otimes st)(\Delta_{Sh}(\alpha)\times_{Sh}\Delta_{Sh}(\overline{\beta}))\\
&= (st\otimes st)\left(\sum_{\substack{\alpha'\star\alpha''=\alpha\\ \beta'\star\beta''=\overline{\beta}}}(\alpha'\times_{Sh}\beta')\otimes(\alpha''\times_{Sh}\beta'')\right)\\
&\overset{(68)}{=} \sum m(st(\alpha')\otimes st(\beta'))\otimes m(st(\alpha'')\otimes st(\beta''))\\
&= \sum m_{MPR\otimes MPR}((st(\alpha')\otimes st(\alpha''))\otimes(st(\beta')\otimes st(\beta'')))\\
&= m_{MPR\otimes MPR}\left(\left[(st\otimes st)\left(\sum_{\alpha'\star\alpha''=\alpha}\alpha'\otimes\alpha''\right)\right]\otimes\left[(st\otimes st)\left(\sum_{\beta'\star\beta''=\overline{\beta}}\beta'\otimes\beta''\right)\right]\right)\\
&= m_{MPR\otimes MPR}\left([(st\otimes st)\circ\Delta_{Sh}(\alpha)]\otimes[(st\otimes st)\circ\Delta_{Sh}(\beta)]\right)\\
&= m_{MPR\otimes MPR}(\Delta(\alpha)\otimes\Delta(\beta))
\end{aligned}$$

Ce qui montre que Δ est un morphisme d'algèbres. Ainsi, MPR est une bigèbre graduée connexe. C'est donc une algèbre de Hopf.

$\square$

Il est intéressant d'étudier des généralisations possibles de l'algèbre MPR : tout d'abord parce que c'est une algèbre de Hopf importante et intéressante par elle-même, mais aussi parce que MPR généralise les algèbres de Hopf $QSym$ et $NSym$[6]. Par exemple, on a une généralisation naturelle de (64) pour des compositions quelconques : pour $\alpha=[a_1,a_2,\dots,a_m]$ et $\beta=[b_1,b_2,\dots,b_n]$ deux compositions, on définit leur produit par :

$$m_{WHA}(\alpha\otimes\beta)=[a_1,a_2,\dots,a_m]\times_{Sh}[ht(\alpha)+b_1,ht(\alpha)+b_2,\dots,ht(\alpha)+b_n] \qquad (69)$$

Notons que si α et β sont des permutations, ce produit coïncide avec celui défini par (64). Reste à savoir s'il existe un coproduit sur le groupe abélien libre de base l'ensemble des compositions qui généralise (65), et qui le munit d'une structure d'algèbre de Hopf (le produit étant donné par (69)). La réponse est positive, l'algèbre de Hopf ainsi obtenue est appelée l'algèbre de Hopf des mots (WHA). Il n'est pas simple d'obtenir une formule générale pour le coproduit, mais on verra par la suite la façon dont il est construit. Voici tout de même des exemples de coproduits :

$$\alpha=[3,2,7,2,4],\Delta(\alpha)=1\otimes\alpha+[1]\otimes[2,6,2,3]+[3,2,6,2]\otimes[1]+\alpha\otimes 1$$

$$\alpha=[7,3,2,2,4],\Delta(\alpha)=1\otimes\alpha+[3]\otimes[3,2,2,4]+[4,1]\otimes[2,2,3]+[6,3,2,2]\otimes[1]+\alpha\otimes 1$$

D'autres généralisations de l'algèbre de Hopf MPR seront présentées dans la suite, notamment $dWHA$, l'algèbre de Hopf des doubles mots.

2.1.2 Endomorphismes d'algèbre de Hopf de rang fini

Dans cette section, H désigne une algèbre de Hopf de rang fini sur $\mathbb{Z}$ (i.e. H est libre de rang fini comme groupe abélien). On notera $End(H)$ le groupe abélien des endomorphismes du groupe abélien H.

Rappelons que pour tout groupe abélien H, on dispose des applications naturelles suivantes :

[6]voir la section 2.4.

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H^* & \longrightarrow & End(H) \\ u \otimes f & \mapsto & (\varphi : v \mapsto f(v)u) \end{array} \tag{70}$$

$$\begin{array}{ccc} End(H) \otimes End(H) & \longrightarrow & End(H \otimes H) \\ f \otimes g & \mapsto & (u \otimes v \mapsto f(u) \otimes g(v)) \end{array} \tag{71}$$

De plus, si H est libre de rang fini (ce qui est notre cas ici), ces deux applications sont des isomorphismes de groupes.

Comme produit tensoriel de deux algèbres de Hopf, $H \otimes H^*$ hérite d'une structure d'algèbre de Hopf. On étudie à présent la façon dont cette structure se traduit en termes d'endomorphismes, i.e. dans $End(H)$.

Convolution : On traduit le produit dans l'algèbre $H \otimes H^*$ en termes d'endomorphismes. Pour cela, il nous faut déterminer l'application réciproque de (70). Fixons une base $(e_i)_i$ de H, et soit $(e_i^*)_i$ la base duale. On définit le morphisme de groupes :

$$\psi : f \in End(H) \mapsto \psi(f) = \sum_i f(e_i) \otimes e_i^*$$

dont on vérifie qu'il est l'inverse de φ. Soit $f, g \in End(H)$, on a dans $H \otimes H^*$:

$$\left(\sum_i f(e_i) \otimes e_i^*\right) \left(\sum_j g(e_j) \otimes e_j^*\right) = \sum_{i,j} f(e_i)g(e_j) \otimes e_i^* e_j^* \tag{72}$$

L'élément correspondant dans $End(H)$ est donné par, $\forall v \in H$:

$$\begin{aligned} L(v) &= \sum_{i,j} f(e_i)g(e_j)e_i^*e_j^*(v) \\ &= \sum_{i,j} \sum_v e_i^*(v^{(1)})e_j^*(v^{(2)})f(e_i)g(e_j) \\ &= \sum_v f\left(\sum_i e_i^*(v^{(1)})e_i\right) g\left(\sum_j e_j^*(v^{(2)})e_j\right) \\ &= \sum_v f(v^{(1)})g(v^{(2)}) = f * g(v) \end{aligned}$$

Ainsi, si f et g sont deux éléments de $End(H)$, leur produit est donné par le produit de convolution, i.e. par la composée :

$$H \xrightarrow{\Delta_H} H \otimes H \xrightarrow{f \otimes g} H \otimes H \xrightarrow{m_H} H \tag{73}$$

Coconvolution : On explicite le coproduit dans $End(H)$. Soit $f \in End(H)$, $\psi(f) = \sum_i f(e_i) \otimes$

e_i^*. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_{H\otimes H^*}\left(\sum_i f(e_i)\otimes e_i^*\right) &= \sum_i (Id\otimes\tau\otimes Id)\circ(\Delta_H\otimes\Delta_{H^*})(f(e_i)\otimes e_i^*) \\
&= \sum_i (Id\otimes\tau\otimes Id)(\Delta_H(f(e_i))\otimes\Delta_{H^*}(e_i^*)) \\
&= \sum_i (Id\otimes\tau\otimes Id)(\Delta_H(f(e_i))\otimes e_i^*\circ m_H) \\
&= \sum_i (Id\otimes\tau\otimes Id)\left(\sum_{f(e_i)} f(e_i)^{(1)}\otimes f(e_i)^{(2)}\otimes\sum_{j,k}\lambda_{j,k}^i e_j^*\otimes e_k^*\right) \\
&= \sum_i\sum_{j,k}\sum_{f(e_i)}\lambda_{j,k}^i f(e_i)^{(1)}\otimes e_j^*\otimes f(e_i)^{(2)}\otimes e_k^*
\end{aligned}$$

en notant $\Delta_H(f(e_i)) = \sum_{f(e_i)} f(e_i)^{(1)}\otimes f(e_i)^{(2)}$ et $\Delta_{H^*}(e_i^*) = \sum_{j,k}\lambda_{j,k}^i e_j^*\otimes e_k^*$. L'élément correspondant dans $End(H)$ est donné par, $\forall v\otimes w\in H\otimes H$:

$$\begin{aligned}
L(v\otimes w) &= \sum_i\sum_{j,k}\sum_{f(e_i)}\lambda_{j,k}^i e_j^*(v) f(e_i)^{(1)}\otimes e_k^*(w) f(e_i)^{(2)} \\
&= \sum_i\sum_{j,k}\lambda_{j,k}^i e_j^*(v) e_k^*(w)\Delta_H(f(e_i)) \\
&= \sum_i e_i^*\circ m_H(v\otimes w)\Delta_H(f(e_i)) \\
&= \Delta_H\left(\sum_i e_i^*\circ m_H(v\otimes w) f(e_i)\right) \\
&= \Delta_H\circ f\circ m_H
\end{aligned}$$

Le coproduit d'un élément f de $End(H)$ est donc donné par :

$$H\otimes H\xrightarrow{m_H} H\xrightarrow{f} H\xrightarrow{\Delta_H} H\otimes H \tag{74}$$

Bien entendu, (74) définit un élément de $End(H\otimes H)$. Mais avec l'isomorphisme (71), on obtient bien un élément de $End(H)\otimes End(H)$.

Unité : Elle est donnée par l'endomorphisme $H\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\xrightarrow{\eta} H$, avec $\eta:\mathbb{Z}\longrightarrow H, k\mapsto k1_H$.

Counité : La counité de $End(H)$ envoie $f\in End(H)$ sur le nombre $\varepsilon\circ f\circ\eta(1)$.

Antipode : Enfin, l'antipode de $End(H)$ est donnée par $f\mapsto S\circ f\circ S$.

L'algèbre de Hopf $End(H)$ est de plus auto-duale. En effet, $End(H)\approx H\otimes H^*$ qui est isomorphe à son dual :

$$(H\otimes H^*)^*\xrightarrow{\sim} H^*\otimes H^{**}\xleftarrow{\sim} H^*\otimes H\xrightarrow{\sim} H\otimes H^*$$

La forme bilinéaire non-dégénérée (mais qui n'est pas définie positive) correspondant au crochet de dualité dans $H\otimes H^*$ est donnée par :

$$(H\otimes H^*)\times(H\otimes H^*)\longrightarrow\mathbb{Z}, \langle u\otimes f, v\otimes g\rangle = f(v)g(u)$$

Le pendant de ce crochet dans $End(H)$ est donné par :

$$End(H) \otimes End(H) \longrightarrow \mathbb{Z}, \langle f, g\rangle = Tr(f \circ g) \tag{75}$$

En effet, si $(e_i)_i$ désigne une base de H, $(e_i^*)_i$ la base duale, on note $(a_{i,j})_{i,j}$ et $(b_{i,j})_{i,j}$ les matrices de f et g dans $(e_i)_i$. On a :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i,j} \langle f(e_i) \otimes e_i^*, g(e_j) \otimes e_j^*\rangle = \sum_{i,j} e_i^*(g(e_j)) e_j^*(f(e_i)) = \sum_{i,j} b_{i,j} a_{j,i} = Tr(f \circ g)$$

Les éléments de $End(H)$ sont des endomorphismes. On dispose donc d'une seconde multiplication donnée par la composition. Seulement, la composition n'a pas a priori de compatibilité particulière avec la structure d'algèbre de Hopf qu'on a mis en place sur $End(H)$. Il peut tout de même être interessant d'obtenir ainsi un nouvel élément à partir de deux autres[7]. De façon duale, on obtient également un second coproduit sur $End(H)$.

Notons que pratiquement l'intégralité de ce qui vient d'être énoncé reste vrai pour des algèbres de Hopf graduées H (en remplaçant le dual par le dual gradué). Seul le coproduit ne peut être défini dans ce cadre. De plus, bien que $H \otimes H^*$ soit encore une algèbre de Hopf, c'est une toute petite partie du groupe abélien formé des endomorphismes homogènes de H. En effet, on a la :

Proposition 40 *Soit H une algèbre de Hopf graduée. Un endomorphisme homogène de H est dans (l'image de) $H \otimes H^*$* (dans $End(H)$) *si et seulement si son image est de rang fini.*

Démonstration : Soit donc f un endomorphisme homogène (de degré 0) de H de rang fini. Comme f est homogène, $Im(f)$ est un sous-espace gradué de H, de rang fini par hypothèse. En particulier, $Im(f) \subset \bigoplus_{k=0}^n H_n$ pour un certain entier n. Considérons alors $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une base de $Im(f)$ formée d'éléments homogènes, qu'on complète en une base $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ de $\bigoplus_{k=0}^n H_n$. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant s$, on note :

$$f(e_j) = \sum_i \lambda_{i,j} e_i$$

On vérifie alors facilement que $\displaystyle\sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \otimes e_j^*$ est l'antécédent de f par (70).

La réciproque est triviale, puisque si φ est égale à (l'image de) $\displaystyle\sum_k u_k \otimes f_k$ (par (70)), $Im(\varphi)$ est un sous-module du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les u_k.

□

Nous allons voir que les éléments de MPR s'interprètent naturellement comme des endomorphismes homogènes de l'algèbre de Hopf *Shuffle*. Cependant, mis à part les multiples de la permutation vide, aucun de ces endomorphismes n'appartient à $H \otimes H^*$.

2.1.3 Interprétation de *MPR* comme algèbre de Hopf d'endomorphismes

Commençons par interpréter les éléments de MPR comme des endomorphismes homogènes du groupe abélien *Shuffle*. Soit donc $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ une permutation, et α une composition. Alors σ envoie α sur zéro si $lg(\sigma) \neq lg(\alpha)$, et si $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ est de longueur m, alors :

$$\sigma(\alpha) = [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(m)}] = [a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_m}] \tag{76}$$

Notons que excepté si σ est la permutation vide (qui envoie [ ] sur [ ] et tout autre mot sur 0), σ n'est jamais dans *Shuffle* $\otimes$ *Shuffle** (puisque pour tout $n \geqslant 1$, il y a une infinité de mots de

[7] voir également la section 2.3.5 sur ce sujet.

longueur n).

Convolution : Il est maintenant possible de faire le produit de convolution de deux permutations en interprétant les permutations comme des endomorphismes de *Shuffle*. Étant donné $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ et $\tau = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$ deux permutations, leur produit de convolution est donné par :

$$\mathit{Shuffle} \xrightarrow{\Delta_{Sh}} \mathit{Shuffle} \otimes \mathit{Shuffle} \xrightarrow{\sigma\otimes\tau} \mathit{Shuffle} \otimes \mathit{Shuffle} \xrightarrow{m_{Sh}} \mathit{Shuffle}$$

Puisque Δ_{Sh} est le coproduit de déconcatenation (voir la formule (65)), le morphisme $\sigma \otimes \tau$ est nul sur tous les termes de la somme $\Delta_{Sh}(\alpha)$ pour tout mot α de longueur non-égale à $m+n$. Et si $\alpha = [a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}]$, $\sigma\otimes\tau$ est nul sur tous les termes de la somme $\Delta_{Sh}(\alpha)$ excepté le terme $[a_1, \ldots, a_m]\otimes[a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}]$, qui est envoyé sur $[a_{s_1}, \ldots, a_{s_m}]\otimes[a_{m+t_1}, \ldots, a_{m+t_n}]$. Ainsi, le produit de convolution de σ et τ envoie le mot α sur le produit de battage $[a_{s_1}, \ldots, a_{s_m}] \times_{Sh} [a_{m+t_1}, \ldots, a_{m+t_n}]$. Ce qui montre que le produit de convolution de σ et τ est égal à la somme de permutations $[s_1, \ldots, s_m] \times_{Sh} [m + t_1, \ldots, m + t_n]$, i.e. au produit de σ et τ dans *MPR* (voir la formule (64)).

Coconvolution : Le coproduit d'un élément f de $End(Shuffle)$ est donné par :

$$H \otimes H \xrightarrow{m_H} H \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\Delta_H} H \otimes H$$

On définit ainsi un morphisme de groupes abéliens :

$$\mathit{MPR} \subset \mathit{End}(\mathit{Shuffle}) \xrightarrow{\mathit{coconv}} \mathit{End}(\mathit{Shuffle} \otimes \mathit{Shuffle}) \tag{77}$$

Pour obtenir un coproduit sur l'algèbre *MPR*, il est donc nécessaire d'avoir une "projection" de l'image de *coconv* (contenue dans $\mathit{End}(\mathit{Shuffle} \otimes \mathit{Shuffle})$) dans $\mathit{MPR} \otimes \mathit{MPR} \subset \mathit{End}(\mathit{Shuffle}) \otimes \mathit{End}(\mathit{Shuffle})$. On commence par traiter un exemple où cela peut être réalisé.

Prenons $\sigma = [3, 1, 4, 5, 2]$, et voyons quelle est l'image dans $\mathit{Shuffle} \otimes \mathit{Shuffle}$ d'un élément de la forme $[a_1, a_2] \otimes [b_3, b_4, b_5]$ par $\mathit{coconv}(\sigma)$:

$$\begin{aligned}
[a_1, a_2] \otimes [b_3, b_4, b_5] \quad \overset{\times_{Sh}}{\mapsto} \quad & [a_1, a_2, b_3, b_4, b_5] + [a_1, b_3, a_2, b_4, b_5] + [a_1, b_3, b_4, a_2, b_5] + [a_1, b_3, b_4, b_5, a_2] \\
& + [b_3, a_1, a_2, b_4, b_5] + [b_3, a_1, b_4, a_2, b_5] + [b_3, a_1, b_4, b_5, a_2] + [b_3, b_4, a_1, a_2, b_5] \\
& + [b_3, b_4, a_1, b_5, a_2] + [b_3, b_4, b_5, a_1, a_2] \\
\overset{\sigma}{\mapsto} \quad & [b_3, a_1, b_4, b_5, a_2] + [a_2, a_1, b_4, b_5, b_3] + \ldots + [b_5, b_3, a_1, a_2, b_4]
\end{aligned}$$

Il reste alors à appliquer le coproduit de déconcaténation sur les dix derniers termes. Mais nous sommes à la recherche d'un endomorphisme appartenant à $\mathit{MPR} \otimes \mathit{MPR}$. Les seules coupes qui peuvent y contribuer sont celles pour lesquelles les a_i sont tous à gauche, et les b_j tous à droite. Ce n'est possible uniquement que pour le second terme parmis les dix. Et une seule coupe le permet (à savoir $[a_2, a_1] \otimes [b_4, b_5, b_3]$). De plus :

$$[a_2, a_1] \otimes [b_4, b_5, b_3] = (st([3, 1]) \otimes st([4, 5, 2]))([a_1, a_2] \otimes [b_3, b_4, b_5])$$

Par ce procédé un peu artificiel, on a donc montré que la composante $(lg = 2) \otimes (lg = 3)$ du coproduit (défini par coconvolution) de $[3, 1, 4, 5, 2]$ est égale à $st([3, 1]) \otimes st([4, 5, 2])$. Or, c'est exactement la composante $(lg = 2) \otimes (lg = 3)$ du coproduit défini en (65). En fait, ce travail peut être fait en toute généralité, et on retrouve exactement la formule (65) pour le coproduit.

On peut généraliser de façon naturelle l'action d'une permutation sur *Shuffle* pour une composition quelconque. En effet, si $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ est un mot arbitraire de hauteur $m = ht(\sigma) = max\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, alors σ agit par zéro pour tout mot α de *Shuffle* de longueur $\neq m$ et si

$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$, $\sigma(\alpha) = [a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_n}]$. On peut appliquer la procédure utilisée auparavant pour *MPR*. On définit ainsi un produit (qui coïncide avec celui donné par la formule par (69)) et un coproduit, mais on peut montrer que ce coproduit n'est pas un morphisme d'algèbres, et *WHA* n'hérite pas d'une structure d'algèbre de Hopf par ce procédé. Cependant, nous verrons qu'il existe une autre manière de définir une action d'un mot arbitraire sur le groupe abélien *Shuffle*, pour laquelle on obtient une structure d'algèbre de Hopf, et où l'artifice qu'on a utilisé précédement dans le cas de *MPR* s'applique.

Quelles hypothèses doit-on faire afin d'obtenir une structure d'algèbre de Hopf sur un module d'endomorphismes donné avec une projection adéquate $End(H \otimes H) \xrightarrow{\pi} End(H) \otimes End(H)$ (où $End(H) \otimes End(H)$ est vu comme un sous-module de $End(H \otimes H)$ de façon naturelle). Nous étudions quelles sont les projections qui peuvent convenir dans la section suivante.

2.1.4 Algèbres de Hopf d'endomorphismes - Le problème général

Soit donc $E(H) \subset End(H)$ un sous-module clôt par convolution, i.e. si $f, g \in E(H)$, alors $m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \in E(H)$. Comme on a pu le remarquer, *coconv* : $f \mapsto \Delta \circ f \circ m$ est à valeur dans $End(H \otimes H)$ et pas nécessairement dans $E(H) \otimes E(H)$.

Supposons H de rang infini. Alors $End(H) \otimes End(H)$ n'est qu'une petite partie de $End(H \otimes H)$. En effet, soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de H. Alors $(e_i \otimes e_j)_{i,j \in I}$ est une base de $H \otimes H$. Un endomorphisme f de $H \otimes H$ est donné par la suite de coefficients $(c_{i,j}^{r,s})$ telle que :

$$f(e_i \otimes e_j) = \sum^{<\infty} c_{i,j}^{r,s} e_r \otimes e_s$$

où pour tout couple (i,j), il n'y a qu'un nombre fini de (r,s) pour lesquels $c_{i,j}^{r,s}$ est non nul. Mais sans hypothèse de finitude, ce nombre ne peut être majoré indépendamment du couple (i,j), ce qui signifie que la matrice $(c_{i,j}^{r,s})$ dont les colonnes sont indexées par les paires $\begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix}$ et les lignes par les paires $\begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix}$ est a priori de rang infini. Soit maintenant g_k, h_k des endomorphismes du groupe abélien H donnés par les coefficients $(a_{i,k}^r)$ et $(b_{j,k}^s)$, avec $k = 1, \ldots, t$, tels que l'on ait :

$$g_k(e_i) = \sum a_{i,k}^r e_r, h_k(e_j) = \sum b_{j,k}^s e_s$$

Alors, pour que l'égalité $f = \sum_{k=1}^t g_k \otimes h_k$ soit vérifiée, on doit avoir l'identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1}^r & a_{i,2}^r & \cdots & a_{i,t}^r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & b_{j,1}^s & \cdots \\ \cdots & b_{j,2}^s & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{j,t}^s & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & c_{i,j}^{r,s} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Or, il n'est pas possible de résoudre une telle identité, puisque en général la matrice de droite dans l'égalité est de rang infini, alors que le produit de gauche est de rang au plus t.

Étudions le cas où H est graduée. On ne considère que des endomorphismes homogènes. Dans ce cas, la somme $f = \sum_{k=1}^t g_k \otimes h_k$ restreinte à $(H \otimes H)_n$ est nécessairement de la forme diagonale par blocs, correspondant à la décomposition $(H \otimes H)_n = \bigoplus_{i=0}^n H_i \otimes H_{n-i}$. Or, ce n'est évidemment pas le cas pour un endomorphisme homogène arbitraire de $H \otimes H$.

Quelles hypothèses doit-on faire pour que la coconvolution $End(H) \longrightarrow End(H \otimes H)$ induise un coproduit via une projection adéquate $End(H \otimes H) \xrightarrow{\pi} E(H) \otimes E(H)$, le coproduit sur $E(H)$ étant alors défini par :

$$\begin{array}{ccc} E(H) & \xrightarrow{\Delta_{E(H)}} & E(H) \otimes E(H) \\ f & \longmapsto & \pi \circ \Delta_H \circ f \circ m_H \end{array} \tag{78}$$

Ce coproduit doit être coassociatif, ce qui n'est pas automatique, et impose certaines conditions sur π. Cependant, et comme souvent, le principal problème est de garantir que le coproduit soit un morphisme d'algèbres (ou de façon équivalente, que le produit soit un morphisme de cogèbres). Ce qui impose la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E(H)^{\otimes 2} \arrow[r, "coconv^{\otimes 2}"] \arrow[d, "conv"'] & End(H^{\otimes 2}) \otimes End(H^{\otimes 2}) \arrow[r, "\pi\otimes\pi"] \arrow[d, "\subset"] & E(H)^{\otimes 4} \arrow[d, "Id\otimes\tau\otimes Id"] \\ E(H) \arrow[d, "coconv"'] & End(H^{\otimes 4}) \arrow[d, "\alpha"] & E(H)^{\otimes 4} \arrow[d, "conv^{\otimes 2}"] \\ End(H^{\otimes 2}) \arrow[d, "Id"'] & End(H^{\otimes 4}) \arrow[d, "conv^{(2)}"] & E(H)^{\otimes 2} \arrow[d, "Id"] \\ End(H^{\otimes 2}) \arrow[r, "Id"] & End(H^{\otimes 2}) \arrow[r, "\pi"] & E(H)^{\otimes 2} \end{tikzcd} \tag{79}$$

Dans ce diagramme, α désigne la conjugaison par $Id \otimes \tau \otimes Id$, i.e. :

$$\alpha(f) = (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ f \circ (Id \otimes \tau \otimes Id)$$

On définit ainsi le bon "entrelacement" à utiliser dans $End(H^{\otimes 4})$, dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} End(H^{\otimes 4}) \arrow[r, "\supset"] \arrow[d, "\alpha"'] & End(H)^{\otimes 4} \arrow[d, "Id\otimes\tau_{End(H)}\otimes Id"] \\ End(H^{\otimes 4}) \arrow[r, "\supset"] & End(H)^{\otimes 4} \end{tikzcd}$$

En effet :

$$\begin{aligned} &(Id \otimes \tau \otimes Id)(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4)(Id \otimes \tau \otimes Id)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) \\ &\qquad = (Id \otimes \tau \otimes Id)(f_1(a_1) \otimes f_2(a_3) \otimes f_3(a_2) \otimes f_4(a_4)) \\ &\qquad = f_1(a_1) \otimes f_3(a_2) \otimes f_2(a_3) \otimes f_4(a_4) \end{aligned}$$

alors que :

$$\begin{aligned} &(Id \otimes \tau_{End(H)} \otimes Id)(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_4)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) \\ &\qquad = (f_1 \otimes f_3 \otimes f_2 \otimes f_4)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) \\ &\qquad = f_1(a_1) \otimes f_3(a_2) \otimes f_2(a_3) \otimes f_4(a_4) \end{aligned}$$

Le morphisme noté $conv^{(2)}$ dans le diagramme (79) est donné par, $\forall g \in End(H^{\otimes 4})$:

$$conv^{(2)}(g) = (m_H \otimes m_H) \circ g \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H)$$

Le demi diagramme de gauche de (79) est toujours commutatif. Cela provient de la structure d'algèbre de Hopf dont est munie la collection des modules $End(H^{\otimes n})$, $n = 1, 2, \ldots$, définie par la convolution et la coconvolution. Ici, la convolution est vue comme le morphisme :

$$End(H^{\otimes 2}) \longrightarrow End(H), f \mapsto m_H \circ f \circ \Delta_H \tag{80}$$

et la coconvolution est donnée par le morphisme :

$$End(H) \longrightarrow End(H^{\otimes 2}), f \mapsto \Delta_H \circ f \circ m_H \tag{81}$$

Plus généralement, on dispose des n morphismes, avec $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{array}{ccc} End(H^{\otimes n+1}) & \overset{conv_{i,i+1}}{\longrightarrow} & End(H^{\otimes n}) \\ f & \longmapsto & (\underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{i-1 \text{ fois}} \otimes m_H \otimes \underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{n-i \text{ fois}}) \circ f \circ (\underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{i-1 \text{ fois}} \otimes \Delta_H \otimes \underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{n-i \text{ fois}}) \end{array}$$

et des n morphismes, avec $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{array}{ccc} End(H^{\otimes n}) & \overset{coconv_{i,i+1}}{\longrightarrow} & End(H^{\otimes n+1}) \\ f & \longmapsto & (\underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{i-1 \text{ fois}} \otimes \Delta_H \otimes \underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{n-i \text{ fois}}) \circ f \circ (\underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{i-1 \text{ fois}} \otimes m_H \otimes \underbrace{Id \otimes \ldots \otimes Id}_{n-i \text{ fois}}) \end{array}$$

Le produit et le coproduit ainsi définis sont associatif et coassociatif, dans le sens où :

$$conv \circ conv_{1,2} = conv \circ conv_{2,3} : End(H^{\otimes 3}) \longrightarrow End(H)$$
$$coconv_{1,2} \circ coconv = coconv_{2,3} \circ coconv : End(H) \longrightarrow End(H^{\otimes 3})$$

Cela résulte directement de l'associativité de m_H et de la coassociativité de Δ_H. On a de plus la propriété de Hopf, à savoir que *coconv* est un morphisme d'algèbres, avec la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} End(H^{\otimes 2}) \arrow[r, "coconv^{(2)}"] \arrow[d, "conv_H"'] & End(H^{\otimes 4}) \arrow[d, "\alpha"] \\ End(H) \arrow[d, "coconv"'] & End(H^{\otimes 4}) \arrow[d, "conv^{(2)}"] \\ End(H^{\otimes 2}) \arrow[r, "="] & End(H^{\otimes 2}) \end{tikzcd} \tag{82}$$

où $coconv^{(2)}$ est donné par, $\forall f \in End(H^{\otimes 2})$:

$$coconv^{(2)}(f) = (\Delta_H \otimes \Delta_H) \circ f \circ (m_H \otimes m_H)$$

On a en particulier : $conv^{(2)} = conv_{1,2} \circ conv_{3,4}$ et $coconv^{(2)} = coconv_{3,4} \circ coconv_{1,2}$. La commutativité du diagramme (82) provient de la structure d'algèbre de Hopf sur H (Δ_H morphisme d'algèbres, ou de manière équivalente m_H morphisme de cogèbres), comme le montre le diagramme commutatif suivant, $\forall f \in End(H^{\otimes 2})$:

$$\begin{tikzcd}
H^{\otimes 2} \arrow[r, "="] \arrow[d, "\Delta^{\otimes 2}"'] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "m"] & \\
H^{\otimes 4} \arrow[d, "Id\otimes\tau\otimes Id"'] & H \arrow[d, "\Delta"] & \\
H^{\otimes 4} \arrow[r, "m^{\otimes 2}"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "f"] & \\
 & H^{\otimes 2} \arrow[r, "\Delta^{\otimes 2}"] \arrow[d, "m"'] & H^{\otimes 4} \arrow[d, "Id\otimes\tau\otimes Id"] \\
 & H \arrow[d, "\Delta"'] & H^{\otimes 4} \arrow[d, "m^{\otimes 2}"] \\
 & H^{\otimes 2} \arrow[r, "="] & H^{\otimes 2}
\end{tikzcd}$$

Reste un problème de taille : savoir quelles sont les hypothèses à faire sur la projection π pour que le demi-diagramme de droite dans (79) soit commutatif.

2.1.5 Autre structure d'algèbre de Hopf sur *MPR*

On a défini à la section 2.1.1 une structure d'algèbre de Hopf sur *MPR* donnée par les formules (64) et (65). On peut la munir d'une seconde structure d'algèbre de Hopf, que l'on décrit maintenant.

Produit : Soient $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ et $\tau = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$ deux permutations, on définit leur produit par :

$$m'(\sigma \otimes \tau) = \sum u \star v \tag{83}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des paires de mots (u, v) telles que $supp(u) \cup supp(v) = \{1, 2, \ldots, m+n\}$, $st(u) = \sigma$, $st(v) = \tau$, et où $u \star v$ désigne le produit de concaténation des mots u et v. L'unité est donnée par la permutation vide.

Exemple $m'([1,2]\otimes[1,2]) = [1,2,3,4]+[1,3,2,4]+[1,4,2,3]+[2,3,1,4]+[2,4,1,3]+[3,4,1,2]$

Coproduit : Soient σ une permutation de longueur n et $I \subset \{1, \ldots, n\}$, σ_I désigne le mot obtenu en ne gardant que les lettres appartenant à I. Par exemple, si $\sigma = [4,1,5,3,2]$, $\sigma_{\{1,2\}} = [1,2]$, $\sigma_{\{1,2,3\}} = [1,3,2]$, $\sigma_{\{3,4,5\}} = [4,5,3]$. Le coproduit est alors donné par :

$$\Delta'(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_{\{1,\ldots,i\}} \otimes st(\sigma_{\{i+1,\ldots,n\}}) \tag{84}$$

On vérifie facilement qu'on définit une counité ε en posant $\varepsilon(\mathbb{Z}S_n) = (0)$ et $\varepsilon([\,]) = 1$.

Exemple $\Delta'([4,1,5,3,2]) = 1 \otimes [4,1,5,3,2] + [1] \otimes [3,4,2,1] + [1,2] \otimes [2,3,1] + [1,3,2] \otimes [1,2] + [4,1,3,2] \otimes [1] + [4,1,5,3,2] \otimes 1$.

Rappel Considérons le $\mathbb{Z}$-module libre M de base l'ensemble des compositions, gradué en posant $deg(\alpha) = wt(\alpha)$ pour toute composition α. On l'a muni des deux structures d'algèbres de Hopf graduées connexes suivantes :

1. L'algèbre de Hopf notée *Shuffle* avec pour produit m_{Sh} et pour coproduit Δ_{Sh} donnés par (8) et (9). On notera dans la suite $*_{Sh}$ le produit de convolution dans $End(Shuffle)$.
2. L'algèbre de Hopf notée *LieHopf* avec pour produit le produit de concaténation $\star$ et pour coproduit $\Delta_{LieHopf}$ donné par (3). On notera $*_{LH}$ le produit de convolution dans $End(LieHopf)$.

De plus, on définit un crochet de Hopf en considérant le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ pour lequel les compositions forment une base orthonormale. En effet, on avait montré que pour toutes compositions $\alpha, \alpha', \alpha''$:

$$\langle \alpha \otimes \alpha', \Delta_{Sh}(\alpha'') \rangle = \langle \alpha \star \alpha', \alpha'' \rangle$$
$$\langle \Delta_{LieHopf}(\alpha), \alpha' \otimes \alpha'' \rangle = \langle \alpha, m_{Sh}(\alpha' \otimes \alpha'') \rangle$$

À la section 2.1.3, on a interprété les éléments de MPR comme des endomorphismes homogènes de M, en posant pour $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ une permutation et pour $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ une composition :

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(m)}] = [a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_m}] & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a vu que la convolution de deux permutations dans *Shuffle* correspond au produit de permutations défini par (64).

Considérons à présent le produit de convolution de deux permutations $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ et $\tau = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$, cette fois-ci dans *LieHopf*. Il est donné par :

$$LieHopf \xrightarrow{\Delta_{LieHopf}} LieHopf \otimes LieHopf \xrightarrow{\sigma\otimes\tau} LieHopf \otimes LieHopf \xrightarrow{m_{LieHopf}} LieHopf$$

Remarque 41 *Rappelons qu'un élément $f \in End(M)$ est dans MPR si et seulement si f commute avec tous les morphismes homogènes de l'algèbre de Hopf LieHopf (dualité de Schur Weil). On vérifie alors trivialement que le produit de convolution $m_{LieHopf} \circ (\sigma \otimes \tau) \circ \Delta_{LieHopf}$ de deux permutations est un élément de MPR. Il définit donc bien une multiplication dans MPR. Reste à la déterminer.*

Si $\alpha = [a_1, \ldots, a_p]$ est une composition, on a :

$$\Delta_{LieHopf}(\alpha) = \sum_{\beta \subset \alpha} \beta \otimes \beta^c = \sum_{r=0}^{p} \sum_{\substack{\nu \in S_p \\ \nu(1) < \ldots < \nu(r) \\ \nu(r+1) < \ldots < \nu(p)}} [a_{\nu(1)}, \ldots, a_{\nu(r)}] \otimes [a_{\nu(r+1)}, \ldots, a_{\nu(p)}]$$

Ainsi, $\sigma \otimes \tau$ est nul sur tous les termes de la somme si $p \neq m + n$. Si $p = m + n$, $\sigma \otimes \tau$ est nul sur tous les termes de la somme sauf si $r = m$, et l'image par $\sigma \otimes \tau$ de $\Delta_{LieHopf}(\alpha)$ est alors :

$$\sum_{\substack{\nu \in S_{m+n} \\ \nu(1) < \ldots < \nu(m) \\ \nu(m+1) < \ldots < \nu(m+n)}} \sigma([a_{\nu(1)}, \ldots, a_{\nu(m)}]) \otimes \tau([a_{\nu(m+1)}, \ldots, a_{\nu(p)}])$$

Or, il est facile de montrer que cette égalité se réécrit de la façon suivante :

$$\sum u([a_1, \ldots, a_m]) \otimes v([a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}])$$

où la somme est prise sur les couples (u, v) tels que $supp(u) \cup supp(v) = \{1, 2, \dots, m+n\}$, $st(u) = \sigma$, $st(v) = \tau$. Reste alors à appliquer le produit de concaténation pour obtenir le produit de convolution dans *LieHopf* de σ et τ. Ainsi, le produit de convolution de σ et τ correspond au (second) produit de σ et τ dans *MPR* (voir la formule (83)).

En procédant de même qu'à la section 2.1.3, on peut effectuer le calcul du coproduit d'une permutation. On montre alors que ce coproduit est exactement celui donné par la formule (84).

Théorème 42 *1. (MPR, m', Δ') est une algèbre de Hopf graduée connexe, non commutative et non cocommutative.*

2. $\theta : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow (MPR, m', \Delta')$, $\theta(\sigma) = \sigma^{-1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf homogène.

Démonstration : On va montrer que la structure d'algèbre de Hopf (MPR, m, Δ) définie par les formules (64) et (65) est conjuguée de celle de (MPR, m', Δ') par θ, ce qui démontrera les deux assertions. On doit donc démontrer, pour toutes permutations σ et τ :

$$\begin{aligned} m'(\sigma \otimes \tau) &= \theta(m(\theta\sigma \otimes \theta\tau)) \\ \Delta'(\sigma) &= (\theta \otimes \theta) \circ \Delta \circ \theta(\sigma) \end{aligned}$$

Notons pour commencer que l'adjoint pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ de l'endomorphisme $\sigma : \alpha \mapsto \sigma(\alpha)$ est donné par $\alpha \mapsto \sigma^{-1}(\alpha)$. En effet, pour toutes compositions α, β :

$$\langle \sigma(\alpha), \beta \rangle = \delta_{\sigma(\alpha),\beta} = \delta_{\alpha,\sigma^{-1}(\beta)} = \langle \alpha, \sigma^{-1}(\beta) \rangle$$

En considérant *MPR* comme un sous-module de $End(M)$, $\theta(\sigma)$ est l'adjoint de σ. Mais, comme on l'a rappelé, les structures définissant *Shuffle* et *LieHopf* sont duales l'une de l'autre. Ainsi, pour tout $f, g \in End(M)$, l'adjoint de $f *_{LH} g := \Delta_{LieHopf} \circ (f \otimes g) \circ m_{LieHopf}$ est $\Delta_{Shuffle} \circ (f^* \otimes g^*) \circ m_{Shuffle} =: f^* *_{Sh} g^*$, où f^* est l'adjoint de f. Dès lors, l'adjoint de $\sigma *_{LH} \tau$ est $\theta(\sigma) *_{Sh} \theta(\tau)$. D'où la première égalité.

Pour la seconde égalité, commençons par remarquer que si $I = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ et si $\sigma \in S_n$, on a :

$$\theta(st(\sigma_I)) = st([\sigma^{-1}(i_1), \ldots, \sigma^{-1}(i_k)]) \tag{85}$$

alors :

$$\begin{aligned} (\theta \otimes \theta) \circ \Delta'(\sigma) &= (\theta \otimes \theta) \left(\sum_{i=0}^{n} \sigma_{\{1,\ldots,i\}} \otimes st(\sigma_{\{i+1,\ldots,n\}}) \right) \\ &\overset{(85)}{=} \sum_{i=0}^{n} st([\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(i)]) \otimes st([\sigma^{-1}(i+1), \ldots, [\sigma^{-1}(n)]) \\ &= (st \otimes st) \left(\sum_{u \star v = \sigma^{-1}} u \otimes v \right) = (st \otimes st) \circ \Delta_{Sh}(\sigma^{-1}) \\ &= \Delta \circ \theta(\sigma) \end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde égalité, et termine la démonstration.

$\square$

2.2 L'algèbre de Hopf des doubles mots $dWHA$

2.2.1 Définitions et principales propriétés de $dWHA$

Soit $\chi = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un alphabet auxiliaire. Une base du groupe abélien libre $dWHA$ est donnée par les couples de mots en l'alphabet χ dont les supports sont égaux :

$$p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}, \ supp(\rho) = supp(\sigma) \tag{86}$$

Ici, les symboles qui apparaissent n'ont pas d'importance, seul leur ordre dans ρ et σ importe. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} [x_1, x_2, x_1, x_3, x_3, x_1, x_4] \\ [x_2, x_3, x_2, x_4, x_1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [x_7, x_6, x_7, x_2, x_2, x_7, x_5] \\ [x_6, x_2, x_6, x_5, x_7] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [y_3, z_4, y_3, x_2, x_2, y_3, x_1] \\ [z_4, x_2, z_4, x_1, y_3] \end{pmatrix} \tag{87}$$

désignent tous le même élément de base de $dWHA$. On appellera ces éléments des substitutions.

Les substitutions p peuvent s'interpréter comme des endomorphismes de *Shuffle*, de la manière suivante : p agit par zéro sur toutes les compositions dont l'ordre relatif des lettres n'est pas le même que pour ρ, et si l'ordre relatif est le même, il lui fait correspondre la composition dont l'ordre relatif des lettres est identique à celui de σ. Par exemple, si p est la substitution (87) et $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$:

$$p(\alpha) = \begin{cases} [a_2, a_3, a_2, a_4, a_1] & \text{si } lg(\alpha) = m = 7 \text{ et } a_1 = a_3 = a_6, \ a_4 = a_5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces endomorphismes satisfont à une propriété d'homogénéité : ils agissent de la même façon "n'importe où". Plus précisément, si $\Phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est une application injective et Φ_* l'application correspondante sur les mots, $\Phi_*(\alpha) = [\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_m)]$, on a :

$$\Phi_* \circ p = p \circ \Phi_*$$

On décrit maintenant la structure d'algèbre de Hopf graduée sur $dWHA$.

Structure de groupe abélien : $dWHA$ est le groupe abélien libre de base l'ensemble des substitutions p. Notons que ce n'est pas une base du produit tensoriel *LieHopf*$\otimes$*Shuffle*, puisque $dWHA$ en est un quotient, obtenu en annulant les couples de mots ne satisfaisant pas la condition de supports, et en identifiant les substitutions dont les ordres relatifs des lettres qui les composent sont identiques. $dWHA$ contient notamment la substitution vide $\begin{pmatrix} [\,] \\ [\,] \end{pmatrix}$, qui agit sur *Shuffle* en envoyant le mot vide sur lui-même et toute autre composition sur zéro.

Graduation : La graduation sur $dWHA$ est donnée par $deg(p) = \sharp supp(\rho)$. Par exemple, le degré de l'élément de base (87) est 4. Le degré de la substitution vide est zéro, et c'est la seule substitution de degré zéro. Le groupe abélien $dWHA$ est donc gradué connexe. Notons de plus que le rang de chacun des sous-espaces homogènes de degré non-nul est infini.

Produit : Soient $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}, p' = \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}$ deux substitutions. Si nécessaire, réécrivons la deuxième substitution (ou la première, ou les deux) de sorte que $supp(\rho) \cap supp(\rho') = \varnothing$. Le produit des deux substitutions p et p' est donné par la somme des substitutions :

$$m_{dWHA}(p \otimes p') = \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix} \tag{88}$$

où $\rho \star \rho'$ désigne la concaténation des mots ρ et ρ', $\times_{Sh}$ est le produit de battage, et si $u = \sigma_1 + \ldots + \sigma_r$ est une somme de mots avec $supp(\sigma_1) = \ldots = supp(\sigma_r) = supp(\rho)$:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma_1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma_r \end{pmatrix}$$

Unité : L'élément unité e est donné par la substitution vide.

Il est facile de voir que le produit ainsi défini est associatif, et respecte la graduation. $(dWHA, m, e)$ est donc une algèbre graduée connexe.

Coproduit : Pour définir le coproduit dans $dWHA$, il est nécessaire d'introduire de nouvelles notions. Soit $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$ un mot en l'alphabet χ. Une bonne coupe de α est une coupe $\alpha = [a_1, \ldots, a_r] \star [a_{r+1}, \ldots, a_m]$ telle que $supp([a_1, \ldots, a_r]) \cap supp([a_{r+1}, \ldots, a_m]) = \varnothing$. Les deux coupes triviales sont toujours de bonnes coupes. Autres exemples, les bonnes coupes du mot $[x_2, x_3, x_2, x_4, x_1]$ sont $[\ ] \otimes [x_2, x_3, x_2, x_4, x_1]$, $[x_2, x_3, x_2] \otimes [x_4, x_1]$, $[x_2, x_3, x_2, x_4] \otimes [x_1]$ et $[x_2, x_3, x_2, x_4, x_1] \otimes [\ ]$. On appelle enfin sous-mot de α un mot de la forme $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}]$ avec $i_1 < \ldots < i_r$.

Le coproduit dans $dWHA$ est défini, pour toute substitution $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$, par :

$$\Delta_{dWHA}(p) = \sum_{\sigma_1 \star \sigma_2 = \sigma} \begin{pmatrix} p^{-1}(\sigma_1) \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p^{-1}(\sigma_2) \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{89}$$

où la somme est prise sur toutes les bonnes coupes $\sigma_1 \star \sigma_2 = \sigma$ du mot σ. Dans cette formule, $p^{-1}(\sigma_i)$ est l'unique sous-mot maximal de ρ dont le support est le même que celui de σ_i. Cette définition respecte la graduation et la condition de support des substitutions.

Exemple Calculons le coproduit de la substitution $p = \begin{pmatrix} [x_1, x_2, x_1, x_3, x_3, x_1, x_4, x_1, x_4] \\ [x_2, x_3, x_2, x_4, x_1] \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{dWHA}(p) &= 1 \otimes p + \begin{pmatrix} [x_2, x_3, x_3] \\ [x_2, x_3, x_2] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_1, x_1, x_1, x_4, x_1, x_4] \\ [x_4, x_1] \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} [x_2, x_3, x_3, x_4, x_4] \\ [x_2, x_3, x_2, x_4] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_1, x_1, x_1, x_1] \\ [x_1] \end{pmatrix} + p \otimes 1 \end{aligned}$$

Counité : La counité est donnée par $\varepsilon(p) = 0$ si $deg(p) > 0$ et ε prend la valeur 1 en la substitution vide.

On vérifie alors facilement que $(dWHA, \Delta_{dWHA}, \varepsilon)$ est une cogèbre graduée connexe.

Théorème 43 $(dWHA, m_{dWHA}, e, \Delta_{dWHA}, \varepsilon)$ *est une algèbre de Hopf graduée connexe, non commutative et non cocommutative.*

Démonstration : On veut donc démontrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} dWHA^{\otimes 2} \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "m"'] & dWHA^{\otimes 4} \arrow[d, "Id\otimes\tau\otimes Id"] \\ dWHA \arrow[d, "\Delta"'] & dWHA^{\otimes 4} \arrow[d, "m\otimes m"] \\ dWHA^{\otimes 2} \arrow[r, "="] & dWHA^{\otimes 2} \end{tikzcd}$$

Soient pour cela $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$, $p' = \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}$ deux substitutions. Leur produit est donné par :

$$m(p \otimes p') = \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}$$

Considérons une coupe $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2$ d'un battage γ de σ et σ'. Si c'est une bonne coupe, elle induit de bonnes coupes de σ et σ', notées $\sigma = \sigma_1 \star \sigma_2$ et $\sigma' = \sigma'_1 \star \sigma'_2$ puisque $supp(\sigma) \cap supp(\sigma') = \varnothing$. Plus particulièrement, σ_1 est le préfixe de σ composé de toutes les lettres de σ qui apparaissent dans le préfixe γ_1 de γ (notons que ces lettres sont reconnaissables grâce à la condition sur les supports, et qu'elles forment un préfixe (et pas seulement un sous-mot) puisque dans un battage, les lettres de chacun des deux facteurs apparaissent dans leur ordre initial). De même, σ_2 est le suffixe de σ composé de toutes les lettres de σ apparaissant dans γ_2. De plus, γ_1 est un battage de σ_1 et σ'_1, et γ_2 un battage σ_2 et σ'_2.
Inversement, soient $\sigma = \sigma_1 \star \sigma_2$ et $\sigma' = \sigma'_1 \star \sigma'_2$ deux bonnes coupes, soit γ_1 un battage de σ_1 et σ'_1, et γ_2 un battage de σ_2 et σ'_2. Alors $\gamma_1 \star \gamma_2$ est un battage de σ et σ', et tous les battages de σ et σ' sont obtenus de cette façon.
Notons enfin que si $q = \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \gamma \end{pmatrix}$, où γ est un battage de σ et σ', et si $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2$ est une bonne coupe, avec γ_1 un battage de σ_1, σ'_1, γ_2 un battage σ_2, σ'_2, alors (toujours pour des conditions de supports) :

$$q^{-1}(\gamma_1) = p^{-1}(\sigma_1) \star p'^{-1}(\sigma'_1), \; q^{-1}(\gamma_2) = p^{-1}(\sigma_2) \star p'^{-1}(\sigma'_2)$$

Finalement, l'image de $p \otimes p'$ par $\Delta \circ m$ est donnée par :

$$\sum \begin{pmatrix} p^{-1}(\sigma_1) \star p^{-1}(\sigma'_1) \\ \sigma_1 \times_{Sh} \sigma'_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p^{-1}(\sigma_2) \star p^{-1}(\sigma'_2) \\ \sigma_2 \times_{Sh} \sigma'_2 \end{pmatrix}$$

où la somme est faite sur l'ensemble des bonnes coupes $\sigma = \sigma_1 \star \sigma_2$, $\sigma' = \sigma'_1 \star \sigma'_2$. Or, c'est précisément ce qu'on obtient en appliquant $(m \otimes m) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ à $p \otimes p'$. Ce qui prouve le théorème (modulo des vérifications triviales pour la counité).

□

On dispose d'une forme bilinéaire non dégérée (non positive) sur $dWHA$ définie par :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho = \sigma', \; \rho' = \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{90}$$

où les deux substitutions doivent être écrites de telle sorte que $supp(\rho) = supp(\sigma) = supp(\rho') = supp(\sigma')$. De façon plus précise, on définit (90) par :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

si et seulement si il existe une substitution de variables Φ telle que $\Phi_*(\rho) = \sigma'$, $\rho' = \Phi_*(\sigma)$, et zéro sinon. Ce crochet est homogène, dans le sens où le crochet de deux substitutions de degrés différents est nul.

Théorème 44 *L'algèbre de Hopf dWHA est auto-duale, i.e. dWHA est munie d'un crochet de Hopf non-dégénéré donné par* (90).

Démonstration : On doit donc montrer, pour toutes substitutions $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$, $p' = \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}$ et $p'' = \begin{pmatrix} \rho'' \\ \sigma'' \end{pmatrix}$, l'égalité suivante :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}, \sum_{\sigma''=\sigma''_1 \star \sigma''_2} \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_1) \\ \sigma''_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_2) \\ \sigma''_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho'' \\ \sigma'' \end{pmatrix} \right\rangle$$

où l'on a supposé, par définition du produit dans $dWHA$, que $supp(\rho) \cap supp(\rho') = \varnothing$.

Supposons que $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho'' \\ \sigma'' \end{pmatrix} \right\rangle$ soit non-nul. Alors nécessairement $\sigma'' = \rho \star \rho'$, et puisque $supp(\rho) \cap supp(\rho') = \varnothing$, c'est une bonne coupe. De plus, ρ'' doit être un battage de σ et σ'. Si toutes ces conditions sont vérifiées, alors $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho'' \\ \sigma'' \end{pmatrix} \right\rangle = 1$, et zéro sinon.

De même, dans $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}, \sum_{\sigma''=\sigma''_1 \star \sigma''_2} \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_1) \\ \sigma''_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_2) \\ \sigma''_2 \end{pmatrix} \right\rangle$, au plus une bonne coupe peut donner un terme non-nul, celle pour laquelle on aurait $\rho = \sigma''_1$ et $\rho' = \sigma''_2$. Et dans ce cas, ρ'' est un battage des mots $p''^{-1}(\sigma''_1)$ et $p''^{-1}(\sigma''_2)$.

À présent, pour que $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}, \sum_{\sigma''=\sigma''_1 \star \sigma''_2} \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_1) \\ \sigma''_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_2) \\ \sigma''_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ ait un terme égal à un (il ne peut y avoir au plus qu'un terme non-nul), il faut que $\rho = \sigma''_1$ et $\rho' = \sigma''_2$ pour une bonne coupe $\sigma'' = \sigma''_1 \star \sigma''_2$, d'où $\sigma'' = \rho \star \rho'$ (et il y a au plus une bonne coupe de cette façon). Il faut de plus que $\sigma = p''^{-1}(\sigma''_1)$ et $\sigma' = p''^{-1}(\sigma''_2)$, et alors ρ'' est un battage de σ et σ'. On a ainsi montré que, si $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}, \sum_{\sigma''=\sigma''_1 \star \sigma''_2} \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_1) \\ \sigma''_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_2) \\ \sigma''_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$, alors $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho'' \\ \sigma'' \end{pmatrix} \right\rangle = 1$.

Inversement, supposons que $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho'' \\ \sigma'' \end{pmatrix} \right\rangle = 1$. Alors $\sigma'' = \rho \star \rho'$ et ρ'' est un battage de σ et σ'. Soit σ''_1 le sous-mot maximal de σ'' ayant le même support que σ, vu comme sous-mot de ρ''. Comme $supp(\sigma''_1) = supp(\sigma) = supp(\rho)$, $\sigma'' = \rho \star \rho'$ et $supp(\rho) \cap supp(\rho') = \varnothing$, on a donc $\sigma''_1 = \rho$, préfixe de σ''. Ce qui montre que $\left\langle \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}, \sum_{\sigma''=\sigma''_1 \star \sigma''_2} \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_1) \\ \sigma''_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p''^{-1}(\sigma''_2) \\ \sigma''_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$. D'où finalement le théorème.

□

Autre structure d'algèbre de Hopf : On dispose d'une seconde structure d'algèbre de Hopf sur le groupe abélien libre de base les substitutions, obtenue par une sorte d'imitation de celle de *Shuffle* ⊗ *LieHopf* (de la même façon que la structure définie précédement sur $dWHA$ est une imitation de celle de *LieHopf* ⊗ *Shuffle*). Elle est définie par :

$$\begin{aligned} m'\left(\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho' \\ \sigma' \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \rho \times_{Sh} \rho' \\ \sigma \star \sigma' \end{pmatrix} \\ \Delta'_{dWHA}\left(\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}\right) &= \sum_{\rho_1 \star \rho_2 = \rho} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ p(\rho_1) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho_2 \\ p(\rho_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{91}$$

où la somme dans la deuxième égalité est prise sur les bonnes coupes, et où $p(\rho_i)$ désigne le sous-mot maximal de σ ayant le même support que ρ_i.
Cette algèbre de Hopf est isomorphe à la précédente, l'isomorphisme étant donné par :

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix} \overset{\theta}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\sigma\\ \rho\end{pmatrix} \tag{92}$$

On définit le produit scalaire $\langle .,. \rangle'$ sur $dWHA$ pour lequel les substitutions forment une base orthonormale. On a alors la :

Proposition 45 *Pour $\langle .,. \rangle'$, m et Δ'_{dWHA} sont duales l'une de l'autre, de même pour m' et Δ_{dWHA}. Ainsi :*

$$\begin{array}{rcl} \langle p\otimes p', \Delta_{dWHA}(p'')\rangle' & = & \langle m'(p\otimes p'), p''\rangle' \\ \langle p, m(p'\otimes p'')\rangle' & = & \langle \Delta'_{dWHA}(p), p'\otimes p''\rangle' \end{array} \tag{93}$$

Démonstration : Puisque θ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf :

$$m' = \theta\circ m\circ(\theta\otimes\theta), \Delta'_{dWHA} = (\theta\otimes\theta)\circ\Delta_{dWHA}\circ\theta$$

Notons de plus que pour toutes substitutions p, p', on a :

$$\langle p, p'\rangle' = \langle p, \theta(p')\rangle = \langle \theta(p), p'\rangle$$

La proposition en résulte directement. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \left\langle m'(p\otimes p'), p''\right\rangle' & = & \left\langle \theta\circ m\circ(\theta\otimes\theta)(p\otimes p'), p''\right\rangle' = \left\langle m\circ(\theta\otimes\theta)(p\otimes p'), p''\right\rangle \\ & = & \left\langle (\theta\otimes\theta)(p\otimes p'), \Delta_{dWHA}(p'')\right\rangle = \left\langle p\otimes p', \Delta_{dWHA}(p'')\right\rangle' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \Delta'_{dWHA}(p), p'\otimes p''\right\rangle' & = & \left\langle (\theta\otimes\theta)\circ\Delta_{dWHA}\circ\theta(p), p'\otimes p''\right\rangle' = \left\langle \Delta_{dWHA}\circ\theta(p), p'\otimes p''\right\rangle \\ & = & \left\langle \theta(p), m(p'\otimes p'')\right\rangle = \left\langle p, m(p'\otimes p'')\right\rangle' \end{array}$$

□

2.2.2 Interprétation de *dWHA* comme algèbre de Hopf d'endomorphismes

Nous avons vu que les substitutions p peuvent s'interpréter comme des endomorphismes de *Shuffle*, de la manière suivante : p agit par zéro sur toutes les compositions α dont l'ordre relatif de ses lettres n'est pas le même que pour ρ, et si l'ordre relatif est le même, il lui fait correspondre la composition σ_α dont l'ordre relatif de ces lettres est identique à celui de σ. Plus précisément, si $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est une application telle que $\Phi_*(\rho) = \alpha$, alors $\sigma_\alpha = \Phi_*(\sigma)$. On peut donc considérer la convolution et la coconvolution de substitutions. On définit ainsi un produit et un coproduit sur $dWHA$, dont on va voir qu'ils coïncident avec le produit et le coproduit définis par (88) et (89).

Convolution : Soit donc $p = \begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}$, $p' = \begin{pmatrix}\rho'\\ \sigma'\end{pmatrix}$ deux substitutions qu'on suppose écrites pour que $supp(\rho)\cap supp(\rho') = \varnothing$, et notons $m = lg(\rho)$, $n = lg(\rho')$. Leur produit de convolution dans *Shuffle* est donné par :

$$\mathit{Shuffle} \overset{\Delta_{Sh}}{\longrightarrow} \mathit{Shuffle}\otimes\mathit{Shuffle} \overset{p\otimes p'}{\longrightarrow} \mathit{Shuffle}\otimes\mathit{Shuffle} \overset{m_{Sh}}{\longrightarrow} \mathit{Shuffle}$$

Puisque Δ_{Sh} est le coproduit de déconcatenation (voir la formule (9)), le morphisme $p\otimes p'$ est nul sur tous les termes de la somme $\Delta_{Sh}(\alpha)$ pour tout mot α de longueur non-égale à $m+n$. Et si $\alpha = [a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}]$, alors $(p\otimes p')\circ\Delta_{Sh}(\alpha) = 0$, sauf s'il existe une application $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\Phi_*(\rho) = [a_1, \ldots, a_m]$ et $\Phi_*(\rho') = [a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}]$. Et dans ce cas :

$$m_{Sh} \circ (p \otimes p') \circ \Delta_{Sh}(\alpha) = m_{Sh}(\Phi_*(\sigma) \otimes \Phi_*(\sigma')) = \Phi_*(\sigma \times_{Sh} \sigma')$$

On a ainsi montré que le produit de convolution des substitutions p et p' correspond à la somme de substitutions $\begin{pmatrix} \rho \star \rho' \\ \sigma \times_{Sh} \sigma' \end{pmatrix}$, i.e. à $m_{dWHA}(p \otimes p')$.

On peut également considérer le produit de convolution de deux substitutions dans *LieHopf*. On montre alors, comme précédement, qu'il correspond au produit m' défini par (91). Il est possible d'obtenir aussi ce résultat comme suit : on munit le groupe abélien libre M de base les compositions du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ pour lequel elles forment une famille orthonormale. L'adjoint de l'endomorphisme $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \in End(M)$ pour ce produit scalaire est donné par l'endomorphisme $\theta(p) = \begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \end{pmatrix}$: en effet, soient α et β deux compositions. On peut supposer que $supp(\alpha) = supp(\beta)$ (sinon $\langle p(\alpha), \beta \rangle = 0 = \langle \alpha, \theta(p)(\beta) \rangle$). On a alors deux cas :

- $p(\alpha) = 0$, alors $\langle p(\alpha), \beta \rangle = 0$, et il n'existe pas d'application $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\Phi_*(\rho) = \alpha$. Or, si $\theta(p)(\beta) \neq 0$, il existe $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\Phi_*(\sigma) = \beta$, et alors : $\langle \alpha, \theta(p)(\beta) \rangle = \delta_{\alpha, \Phi_*(\rho)} = 0$.
- $p(\alpha) \neq 0$, il existe une application $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\Phi_*(\rho) = \alpha$. Alors :

$$\langle p(\alpha), \beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \Phi_*(\sigma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ainsi montré que, pour que $\langle p(\alpha), \beta \rangle = 1$, il faut et il suffit qu'il existe une application $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\Phi_*(\rho) = \alpha$ et $\Phi_*(\sigma) = \beta$. De même, on montre que $\langle \alpha, \theta(p)(\beta) \rangle = 1$ si et seulement si il existe une application $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\Phi_*(\sigma) = \beta$ et $\Phi_*(\rho) = \alpha$. D'où le fait que $\theta(p)$ est l'adjoint de l'endomorphisme p.

Rappelons enfin que $\langle .,. \rangle$: *LieHopf* $\times$ *Shuffle* $\to \mathbb{Z}$ est un crochet de Hopf. Ainsi, l'adjoint de $m_{Sh} \circ (p \otimes p') \circ \Delta_{Sh} = m(p \otimes p')$ est donné par $m_{LH} \circ (\theta(p) \otimes \theta(p')) \circ \Delta_{LH} = \theta \circ m(p \otimes p')$, d'où le résultat.

Coconvolution : On tente d'adapter ici le procédé utilisé à la section 2.1.3, qui a permis de définir un coproduit sur *MPR*. Par commodité, on va étudier la coconvolution $coconv(p)$ d'une substitution $p \in End(LieHopf)$ plutôt que dans $End(Shuffle)$ (on obtiendra le coproduit qui résulte de la coconvolution dans *Shuffle* par dualité). Elle est donnée par :

$$LieHopf \otimes LieHopf \xrightarrow{m_{LH}} LieHopf \xrightarrow{p} LieHopf \xrightarrow{\Delta_{LH}} LieHopf \otimes LieHopf$$

Pour obtenir un coproduit sur l'algèbre *dWHA*, il est nécessaire d'avoir une "projection" de l'image de *coconv* (contenue dans $End(LieHopf \otimes LieHopf)$) dans $dWHA \otimes dWHA \subset End(LieHopf) \otimes End(LieHopf)$. On commence par traiter un exemple.

Prenons $p = \begin{pmatrix} [x_2, x_3, x_2, x_4, x_1] \\ [x_1, x_2, x_1, x_3, x_3, x_1, x_4] \end{pmatrix}$, et voyons l'image dans *LieHopf* $\otimes$ *LieHopf* d'un élément de la forme $[a_1, a_2] \otimes [b_3, b_4, b_5]$ par $coconv(p)$:

$$\begin{array}{rcl} [a_1, a_2] \otimes [b_3, b_4, b_5] & \overset{\star}{\mapsto} & [a_1, a_2, b_3, b_4, b_5] \\ & \overset{p}{\mapsto} & \begin{cases} [b_5, a_1, b_5, a_2, a_2, b_5, b_4] & \text{si } a_1 = b_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Reste alors à appliquer Δ_{LH}. Mais nous sommes à la recherche d'un endomorphisme appartenant à $dWHA \otimes dWHA$. Ce qui est exclu dans ce cas, du fait de la condition $a_1 = b_3$. Ainsi, le coproduit de p recherché agit par zéro sur tout mot de la forme $[a_1, a_2] \otimes [b_3, b_4, b_5]$. Traitons du cas d'un mot de la forme $[a_1, a_2, a_3] \otimes [b_4, b_5]$:

$$\begin{aligned}
[a_1, a_2, a_3] \otimes [b_4, b_5] &\overset{\star}{\mapsto} [a_1, a_2, a_3, b_4, b_5] \\
&\overset{p}{\mapsto} \begin{cases} [b_5, a_1, b_5, a_2, a_2, b_5, b_4] & \text{si } a_1 = a_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&\overset{\Delta_{LH}}{\mapsto} 1 \otimes [b_5, a_1, b_5, a_2, a_2, b_5, b_4] + \ldots + [a_1, a_2, a_2] \otimes [b_5, b_5, b_5, b_4] + \ldots \\
&\qquad \ldots + [b_5, a_1, b_5, a_2, a_2, b_5, b_4] \otimes 1
\end{aligned}$$

Il y a un unique terme pour lequel les a_i sont tous à gauche, et les b_j tous à droite : le terme $[a_1, a_2, a_2] \otimes [b_5, b_5, b_5, b_4]$. De plus :

$$[a_1, a_2, a_2] \otimes [b_5, b_5, b_5, b_4] = \left(\begin{pmatrix} [x_2, x_3, x_2] \\ [x_2, x_3, x_3] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_4, x_1] \\ [x_1, x_1, x_1, x_4] \end{pmatrix} \right) ([a_1, a_2, a_1] \otimes [b_4, b_5])$$

Or, c'est exactement la façon dont agit le coproduit $\Delta'(p)$ sur $[a_1, a_2, a_1] \otimes [b_4, b_5]$. En effet, on a :

$$\Delta'(p) = 1 \otimes p + \begin{pmatrix} [x_2, x_3, x_2] \\ [x_2, x_3, x_3] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_4, x_1] \\ [x_1, x_1, x_1, x_4] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [x_2, x_3, x_2, x_4] \\ [x_2, x_3, x_3, x_4] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_1, x_1, x_1] \end{pmatrix} + p \otimes 1$$

En procédant ainsi plus généralement, on peut montrer qu'on retrouve exactement la formule (91) pour le coproduit Δ' d'une substitution. Par passage à l'adjoint dans $End(M)$, on obtient le coproduit Δ, qui résulte lui de la coconvolution des substitutions dans $End(Shuffle)$. En particulier, la convolution et la coconvolution des substitutions dans $End(Shuffle)$ (ou de manière équivalente dans $End(LieHopf)$) munissent le groupe abélien libre de base les substitutions d'une structure d'algèbre de Hopf, précisément celle définie à la section précédente.

2.2.3 L'algèbre de Hopf des mots *WHA*

Considérons le sous-groupe de $dWHA$ de base les substitutions de la forme suivante :

$$p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}, \; \rho = [\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1 \text{ fois}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{r_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{r_m \text{ fois}}] \overset{\text{notation}}{=} [x_1^{r_1}, \ldots, x_m^{r_m}] \tag{94}$$

Ce sont les substitutions p telles que, outre la condition de supports, le mot du haut satisfait à la propreté : si deux lettres sont égales, alors toutes les lettres entre elles-deux leur sont aussi égales. Il est immédiat de voir que le produit de deux substitutions de la forme (94) est une somme de telles substitutions, et que le coproduit d'une substitution de cette forme est la somme de produits tensoriels de telles substitutions. On définit ainsi une sous-algèbre de Hopf de $dWHA$.

Une substitution de la forme (94) peut être codée par une composition de la façon suivante. Soit $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ une composition, on note $\{a'_1, \ldots, a'_n\} = supp(\alpha)$, $a'_1 < \ldots < a'_n$. Alors la substitution associée à α peut s'écrire :

$$p(\alpha) = \begin{pmatrix} [x_{a'_1}^{r_1}, \ldots, x_{a'_n}^{r_n}] \\ [x_{a_1}, \ldots, x_{a_m}] \end{pmatrix} \tag{95}$$

où $r_1 = a'_1, \ldots, r_i = a'_i - a'_{i-1}, \ldots, r_n = a'_n - a'_{n-1}$. Inversement, si $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$ est une substitution de la forme (94) (attention à la numérotation : quitte à réécrire p dans un nouvel alphabet, on peut supposer que ρ est exactement de la forme décrite en (94), on dira alors que p est écrite de façon canonique), alors la composition α associée est obtenue comme suit : si $\sigma = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}]$, alors $\alpha(p) = [a_1, \ldots, a_t]$ avec $a_j = r_1 + \ldots + r_{i_j}$.

Exemple : Si $\alpha = [3, 2, 7, 2, 4]$, alors $p(\alpha) = \begin{pmatrix} [x_2^2, x_3, x_4, x_7^3] \\ [x_3, x_2, x_7, x_2, x_4] \end{pmatrix}$.
Inversement, si p est la substitution précédente, on la réécrit de façon canonique :

$$p = \begin{pmatrix} [x_1^2, x_2, x_3, x_4^3] \\ [x_2, x_1, x_4, x_1, x_3] \end{pmatrix}$$

Alors $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$, $r_4 = 3$ et $i_1 = 2$, $i_2 = 1$, $i_3 = 4$, $i_4 = 1$, $i_5 = 3$. Et l'on a :

$$\alpha(p) = [r_1 + r_2, r_1, r_1 + r_2 + r_3 + r_4, r_1, r_1 + r_2 + r_3] = [3, 2, 7, 2, 4]$$

On a défini précédement une bijection entre les compositions et les substitutions de la forme (94). Par propriété universelle des groupes libres, on dispose donc d'un isomorphisme de groupes φ, du groupe abélien libre engendré par les compositions sur le groupe abélien libre de base les substitutions de la forme (94). Or, ce dernier possède de plus une structure d'algèbre de Hopf (c'est, on l'a vu, une sous-algèbre de Hopf de $dWHA$). Le groupe abélien libre de base les compositions hérite donc d'une structure d'algèbre de Hopf $(WHA, m_{WHA}, \Delta_{WHA})$ définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} m_{WHA}(\alpha \otimes \beta) & = & \varphi^{-1}(m_{dWHA}(p(\alpha) \otimes p(\beta))) \\ \Delta_{WHA}(\alpha) & = & \varphi^{-1}(\Delta_{dWHA}(p(\alpha))) \end{array} \tag{96}$$

Par définition de la structure d'algèbre de Hopf sur WHA :

$$\varphi : (WHA, m_{WHA}, \Delta_{WHA}) \longrightarrow (dWHA, m_{dWHA}, \Delta_{dWHA}), \alpha \mapsto p(\alpha) \text{ defini par (95)}$$

est un monomorphisme homogène d'algèbres de Hopf graduées connexes, WHA étant munie de la graduation définie par $deg(\alpha) = \sharp supp(\alpha)$ pour toute composition α.

Vérifions que le produit m_{WHA} coïncide avec celui défini par (69) :
Pour cela, il nous faut généraliser la notion de standardisation à des compositions quelconques. On note $ct(\alpha) = \sharp supp(\alpha)$ le contenu d'une composition α. On définit alors :

$$std_\alpha : supp(\alpha) \longrightarrow \{1, \ldots, ct(\alpha)\} \tag{97}$$

comme l'unique application strictement croissante entre ces sous-ensembles ordonnés de $\mathbb{N}$.

Soient à présent $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ et $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_p]$ deux compositions, $p(\alpha) = \begin{pmatrix} [x_{a'_1}^{s_1}, \ldots, x_{a'_n}^{s_n}] \\ [x_{a_1}, \ldots, x_{a_m}] \end{pmatrix}$ et $p(\beta) = \begin{pmatrix} [x_{b'_1}^{t_1}, \ldots, x_{b'_q}^{t_q}] \\ [x_{b_1}, \ldots, x_{b_p}] \end{pmatrix}$ les substitutions associées. Quitte à les réécrire, on peut supposer que $p(\alpha) = \begin{pmatrix} [x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}] \\ [x_{std_\alpha(a_1)}, \ldots, x_{std_\alpha(a_m)}] \end{pmatrix}$, $p(\beta) = \begin{pmatrix} [x_{n+1}^{t_1}, \ldots, x_{n+q}^{t_q}] \\ [x_{n+std_\beta(b_1)}, \ldots, x_{n+std_\beta(b_p)}] \end{pmatrix}$.
Alors :

$$m_{dWHA}(p(\alpha) \otimes p(\beta)) = \begin{pmatrix} [x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n}, x_{n+1}^{r_{n+1}}, \ldots, x_{n+q}^{r_{n+q}}] \\ [x_{std_\alpha(a_1)}, \ldots, x_{std_\alpha(a_m)}] \times_{Sh} [x_{n+std_\beta(b_1)}, \ldots, x_{n+std_\beta(b_p)}] \end{pmatrix}$$

avec $r_i = s_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $r_{n+i} = t_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$. On a alors deux cas :

1. Soit $i_j = std_\alpha(a_k)$, et alors le coefficient correspondant dans la composition est donné par $r_1 + \ldots + r_{std_\alpha(a_k)} = a_k$.
2. Soit $i_j = n + std_\beta(b_l)$, et alors le coefficient correspondant dans la composition est donné par $r_1 + \ldots + r_n + r_{n+1} + \ldots + r_{n+std_\beta(b_l)} = s_1 + \ldots + s_n + t_1 + \ldots + t_{std_\beta(b_l)} = ht(\alpha) + b_l$.

Finalement, la somme de compositions associée est bien :

$$[a_1, a_2, \ldots, a_m] \times_{Sh} [ht(\alpha) + b_1, ht(\alpha) + b_2, \ldots, ht(\alpha) + b_p] = m_{WHA}(\alpha \otimes \beta)$$

Il n'est pas simple d'expliciter une formule pour Δ_{WHA}. Donnons tout de même un exemple de calcul d'un coproduit dans *WHA* : pour le cas de α et p de l'exemple précédent, on a :

$$\Delta_{dWHA}(p) = 1 \otimes p + \begin{pmatrix} [x_2] \\ [x_2] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_1^2, x_3, x_4^3] \\ [x_1, x_4, x_1, x_3] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [x_1^2, x_2, x_4^3] \\ [x_2, x_1, x_4, x_1] \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} [x_3] \\ [x_3] \end{pmatrix} + p \otimes 1$$

d'où :

$$\alpha = [3, 2, 7, 2, 4],\ \Delta(\alpha) = 1 \otimes \alpha + [1] \otimes [2, 6, 2, 3] + [3, 2, 6, 2] \otimes [1] + \alpha \otimes 1$$

Nous verrons dans la section suivante que la structure d'algèbre de Hopf que nous avons ainsi pu mettre en place sur *WHA* généralise bien l'algèbre de Hopf (MPR, m, Δ).

Via la bijection entre compositions et substitutions de la forme (94), on peut faire agir une composition sur l'algèbre de Hopf *Shuffle*, via la substitution qui lui correspond. Cette action est différente de celle qui a été mentionnée à la section 2.1.3. Par exemple, pour p et α donnés précédement, $ht(\alpha) = 7$, α agit par zéro sur tout mot de longueur différente de 7, et pour un mot de longueur 7 de la forme $[x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_4]$, α agit de la même manière que dans la section 2.1.3, i.e. en prélevant la troisième, la seconde, la septième, la seconde et la quatrième lettre. Mais α agit ici par zéro sur tous les mots de *Shuffle* de longueur 7 qui ne sont pas de la forme $[x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_4]$, à la différence de l'action qu'on a pu définir auparavant.

Il est alors possible de considérer le produit de convolution de compositions dans End(*Shuffle*), et la coconvolution de compositions. Par l'analyse effectuée à la section 2.2.2, la multiplication et la comultiplication ainsi obtenues sur $WHA \subset dWHA$ sont données par m_{dWHA} et Δ_{dWHA}. Le produit et le coproduit qu'on obtient de cette manière sont donc les mêmes que ceux qu'on vient de définir sur *WHA*.

2.2.4 *MPR* est une sous-algèbre de Hopf de *dWHA*

Soit $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ une permutation de longueur n. Notons qu'une permutation est précisément une composition dont la hauteur est égale à la longueur, et qui n'a pas de multiplicité. On associe à τ une substitution de la manière suivante :

$$\varphi : \tau = [t_1, \ldots, t_n] \longmapsto p(\tau) = \begin{pmatrix} [x_1, \ldots, x_n] \\ [x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}] \end{pmatrix} \in dWHA \tag{98}$$

Il est facile de caractériser les substitutions obtenues de cette façon : ce sont précisément celles pour lesquelles le mot du haut et le mot du bas sont sans multiplicité.

Plus généralement, si $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ est une composition sans multiplicité, il y a aussi une substitution de la forme (98) qui lui est associée. En effet, si on note $\{a_1, \ldots, a_n\}$ le support de τ, avec $a_1 < \ldots < a_n$, la substitution associée à τ est :

$$\begin{pmatrix} [x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}] \\ [x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}] \end{pmatrix} = p(st(\tau))$$

où st est la standardisation, et où $p(st(\tau))$ est définie comme en (98).

Étant donné notre définition, $p(\tau) \in WHA \subset dWHA$. Mais à ce stade, il est préférable de voir MPR comme une sous-algèbre de Hopf de $dWHA$. En effet, on a la :

Proposition 46 *L'application φ définie par :*

$$\varphi : \tau = [t_1, \ldots, t_n] \in MPR \longmapsto p(\tau) = \begin{pmatrix} [x_1, \ldots, x_n] \\ [x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}] \end{pmatrix} \in dWHA \tag{99}$$

est un monomorphisme homogène d'algèbres de Hopf graduées connexes $MPR \longrightarrow dWHA$.

Ici, MPR est munie de la structure d'algèbre de Hopf définie par les formules (64) et (65), et $dWHA$ est munie de la structure d'algèbre de Hopf définie par les formules (88) et (89).

Démonstration : Immédiatement, φ est homogène, $\varphi([\,]) = \begin{pmatrix} [\,] \\ [\,] \end{pmatrix}$, et $\varepsilon_{dWHA} \circ \varphi = \varepsilon_{MPR}$.
Soit $\sigma = [s_1, \ldots, s_m]$ et $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ deux permutations. Le produit dans $dWHA$ des deux substitutions associées à σ et τ est :

$$\begin{pmatrix} [x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] \\ [x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}] \times_{Sh} [y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}] \\ [x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}] \times_{Sh} [x_{m+t_1}, \ldots, y_{m+t_n}] \end{pmatrix}$$

Or, c'est précisément la somme des substitutions correspondant à $[s_1, \ldots, s_m] \times_{Sh} [m+t_1, \ldots, m+t_n]$. Ainsi, φ respecte le produit.
Soit $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ une permutation, $p(\tau) = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$ la substitution associée. On a :

$$\Delta_{dWHA}(p(\tau)) = \sum_{\text{bonnes coupes}} \begin{pmatrix} p(\tau)^{-1}(\sigma_1) \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p(\tau)^{-1}(\sigma_2) \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{100}$$

Comme σ est sans multiplicité, toutes les coupes sont de bonnes coupes, et toujours parce qu'il n'y a pas de multiplicité, σ_1 est une permutation en l'alphabet formé par les lettres apparaissant dans $p(\tau)^{-1}(\sigma_1)$, qui est lui même un sous-mot de $[x_1, \ldots, x_n]$. Ainsi, quitte à réécrire les substitutions qui apparaissent dans (100) de façon canonique (94), la somme des produits tensoriels de substitutions (100) correspond à :

$$\sum_{i=0}^{n} st([t_1, \ldots, t_i]) \otimes st([t_{i+1}, \ldots, t_n])$$

ce qui montre que φ préserve le coproduit.

$\square$

Remarque 47 *De façon immédiate, φ est la restriction à MPR du morphisme d'algèbres de Hopf $WHA \longrightarrow dWHA$ défini par* (95)*. Ainsi,* (MPR, m, Δ) *est une sous-algèbre de Hopf de WHA (ce qui justifie que WHA soit une généralisation de MPR comme on avait pu l'indiquer).*

Rappelons que l'on dispose sur MPR d'une seconde structure d'algèbre de Hopf graduée connexe (MPR, m', Δ') donnée par les formules (83) et (84). On avait d'ailleur montré que $\theta : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow (MPR, m', \Delta'), \theta(\sigma) = \sigma^{-1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. On précise ces résultats ici, en faisant le lien avec les structures d'algèbres de Hopf qu'on a pu mettre en place sur $dWHA$.

Proposition 48 *L'application φ définie par* (98) *est (aussi) un monomorphisme homogène d'algèbres de Hopf* $(MPR, m', \Delta') \longrightarrow (dWHA, m', \Delta')$. *L'isomorphisme* $(dWHA, m, \Delta) \xrightarrow{\theta} (dWHA, m', \Delta')$ *induit un isomorphisme* $(MPR, m, \Delta) \longrightarrow (MPR, m', \Delta')$ *donné par* $\tau \mapsto \tau^{-1}$.

Démonstration : Il n'est pas difficile de prouver directement le premier point, en s'inspirant de la démonstration de la proposition précédente. Donnons ici un argument plus rapide à mettre en oeuvre, en commençant par démontrer le deuxième point. Le premier point s'en déduit alors aussitôt, grâce à l'isomorphisme $\tau \mapsto \tau^{-1}$ entre (MPR, m, Δ) et (MPR, m', Δ').

Soit $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ une permutation. La substitution associée est :

$$p(\tau) = \begin{pmatrix} [x_1, \ldots, x_n] \\ [x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}] \end{pmatrix}$$

En lui appliquant l'isomorphisme θ, on obtient :

$$\begin{pmatrix} [x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}] \\ [x_1, \cdots, x_n] \end{pmatrix}$$

Puisque les compositions du haut et du bas sont sans multiplicité, cette substitution provient d'une permutation. Pour déterminer cette permutation, il faut réécrire notre substitution de manière canonique, i.e. avec les lettres formant la composition du haut dans le "bon ordre". On obtient :

$$p(\tau) = \begin{pmatrix} [x_1, \ldots, x_n] \\ [x_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, x_{\tau^{-1}(n)}] \end{pmatrix}$$

où τ^{-1} est la permutation inverse de τ, soit $\tau^{-1} : t_i \mapsto i$. Ce qui prouve le deuxième point, et termine la démonstration.

□

On munit *MPR* de la forme bilinéaire non dégénérée suivante :

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \sigma^{-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{101}$$

Avec ce qui vient d'être dit, ce n'est rien d'autre que la restriction à *MPR* de la forme bilinéaire non dégénérée définie par (90). Il en découle alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 49

1. *Les algèbres de Hopf* (MPR, m, Δ) *et* (MPR, m', Δ') *sont auto-duales, et respectent le crochet défini par* (101).
2. *Muni du produit scalaire* $\langle ., . \rangle'$ *pour lequel les permutations forment une base orthonormale,* (MPR, m, Δ) *est duale de* (MPR, m', Δ').

On a associé à une permutation τ une substitution $p(\tau)$ définie par (98). On obtient ainsi une action de *MPR* sur *Shuffle* par l'intermédiaire de (99). En fait, cette action coïncide avec celle qu'on a pu définir par (76). On retrouve en particulier que la multiplication et la comultiplication de permutations dans *End*(*Shuffle*) correspondent au produit et au coproduit dans l'algèbre de Hopf (MPR, m, Δ).

2.2.5 Autres exemples de sous-algèbres de Hopf de $dWHA$ et de WHA

On donne ici quelques exemples de sous-algèbres de Hopf naturelles de WHA et de $dWHA$

Compositions injectives : Une composition $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ est dite injective si elle n'a pas de répétition (pas de multiplicité), i.e. si le cardinal du support de τ est égal à la longueur de τ. Pour la substitution associée $p(\tau) = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$ dans $dWHA$, cela revient à demander que σ soit sans multiplicité (voir (95)). De telles substitutions sont dites injectives (bien sûr, cela n'a rien à voir avec l'injectivité de l'endomorphisme correspondant de *Shuffle*, qui lui n'est jamais injectif par définition). Clairement, le produit de deux substitutions injectives est une somme de substitutions injectives, et le coproduit d'une substitution injective est une somme de produits tensoriels de substitutions injectives.

Le groupe abélien engendré par les compositions injectives est donc une sous-algèbre de Hopf de $WHA \hookrightarrow dWHA$, notée WHA_{inj}.

Compositions surjectives : Une composition $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ est dite surjective si elle n'a pas de "trou", i.e. si $ct(\tau) = \sharp supp(\tau)$ est égal à $ht(\tau) = max\{t_1, \ldots, t_n\}$. En particulier, $min\{t_1, \ldots, t_n\} = 1$. Étant donné la définition de $p(\tau) = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$, il est équivalent de demander que ρ soit sans multiplicité. De même, il est immédiat que le produit de deux substitutions surjectives est une somme de substitutions surjectives, et que le coproduit d'une substitution surjective est une somme de produits tensoriels de substitutions surjectives.

Le groupe abélien engendré par les compositions surjectives est donc une sous-algèbre de Hopf de $WHA \hookrightarrow dWHA$, notée WHA_{surj}. De plus, on a clairement $WHA_{inj} \cap WHA_{surj} = MPR$.

Multisupport : Rappelons que le multisupport d'une composition $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ est l'ensemble noté $msupp(\tau)$ des différentes lettres qui apparaissent dans la composition τ avec leur multiplicité. Plus précisément, c'est un couple (T, ι) avec T un ensemble, $\iota : T \to \mathbb{N}^*$ une application qui associe à chaque élément de T sa multiplicité. Si $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ et $\iota(t_i) = r_i$ la multiplicité de t_i, on notera plus simplement $msupp(\tau) = \{t_1^{r_1}, \ldots, t_n^{r_n}\}$. Par exemple, $msupp([6, 5, 7, 2, 5, 6, 1, 1, 5]) = \{1^2, 2, 5^3, 6^2, 7\}$.
Considérons à présent les substitutions telles que la composition du haut ρ et celle du bas σ satisfont :

$$msupp(\rho) = msupp(\sigma)$$

Il est facile de montrer que ces substitutions définissent une sous-algèbre de Hopf de $dWHA$. On la note $dWHA_{msupp}$.

Multiplicité bornée : Fixons un entier naturel non-nul $b \in \mathbb{N}^*$. Considérons les substitutions pour lesquelles la multiplicité de chacune des lettres qui y apparaissent (dans ρ et σ) est $\leqslant b$. Elles engendrent également une sous-algèbre de Hopf, notée $dWHA(b)$. De nombreuses variantes peuvent être proposées, par exemple en ne considérant que les substitutions pour lesquelles la multiplicité de chacune des lettres (dans ρ et σ), est précisément b.

On peut également définir des généralisations de l'algèbre de Hopf $dWHA$. Par exemple, considérons les paires de compositions $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$ telles que $supp(\rho) \subset supp(\sigma)$. Le produit et le coproduit définis dans $dWHA$ s'étendent naturellement, en définissant dans la formule du coproduit $p^{-1}(\sigma_i)$ comme le sous-mot maximal de ρ dont le support est inclu dans $supp(\sigma_i)$, $i = 1, 2$. De façon duale, on peut définir une généralisation de $(dWHA, m', \Delta')$ en inversant le sens des inclusions dans les conditions de supports.

Toutes ces algèbres de Hopf ont bien sûr de nombreuses relations d'inclusions. Elles ont également des projections naturelles. On en explicite deux maintenant.

Projection $dWHA \to MPR$: Dans $dWHA$, considérons l'ensemble des substitutions $p = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$ telles que au moins une lettre apparait dans ρ ou σ ou les deux, avec une multiplicité > 1. On note J_{mult} le groupe abélien engendré par ces substitutions.

Proposition 50 *1. J_{mult} est un idéal de Hopf de $dWHA$.*

2. L'application ψ définie par

$$\psi : dWHA \longrightarrow MPR, p \longmapsto \left\{ \begin{array}{lll} p & si & p \in MPR \subset dWHA \\ 0 & si & p \in J_{mult} \end{array} \right. \tag{102}$$

est une rétraction d'algèbres de Hopf pour l'inclusion $MPR \subset dWHA$.

Démonstration : Montrons que J_{mult} est un idéal de Hopf de $dWHA$. Si $p \in J_{mult}$, et si p' est une substitution quelconque de $dWHA$, il est clair que leur produit appartient à J_{mult}, puisque si ρ contient un élément de multiplicité > 1, il en est de même de la concaténation $\rho \star \rho'$, et si σ contient un élément de multiplicité > 1, il en est de même pour un battage de σ et σ'. Pour le coproduit, si σ contient un élément de multiplicité > 1, il en est de même pour σ_1 ou σ_2 ou les deux, puisqu'on somme sur les bonnes coupes de σ. Et si ρ contient un élément de multiplicité > 1, il en est de même pour $p^{-1}(\sigma_1)$ ou $p^{-1}(\sigma_2)$ ou les deux, puisque ce sont deux sous-mots de ρ de supports disjoints. Comme enfin, $\varepsilon(J_{mult}) = (0)$, et $S(J_{mult}) \subset J_{mult}$ (par le lemme 35), J_{mult} est bien un idéal de Hopf.

Notons que si une substitution $p \in dWHA$ n'appartient pas à J_{mult}, alors p est associée à une permutation, i.e. $p \in MPR$. Ainsi ψ est bien définie. De plus, comme J_{mult} est un idéal de Hopf, c'est un morphisme d'algèbres de Hopf. ψ est l'identité sur la sous-algèbre de Hopf MPR de $dWHA$. C'est donc bien une rétraction d'algèbres de Hopf pour l'inclusion $MPR \subset dWHA$.

□

Standardisation surjective : Rappelons que l'on avait généralisé la notion de standardisation à des compositions quelconques, en posant pour toute composition $\alpha = [a_1, \dots, a_m]$:

$$std_\alpha : supp(\alpha) \longrightarrow \{1, \dots, ct(\alpha)\}$$

comme étant l'unique application strictement croissante entre ces sous-ensembles ordonnés de $\mathbb{N}$, avec $ct(\alpha) = \sharp supp(\alpha)$ le contenu de α. On définit alors :

$$st_{surj} : WHA \longrightarrow WHA_{surj}, \alpha \longmapsto [std_\alpha(a_1), \dots, std_\alpha(a_m)] \tag{103}$$

Proposition 51 *Le morphisme de groupes abéliens* (103) *est une rétraction d'algèbres de Hopf pour l'inclusion $WHA_{surj} \subset WHA$, et induit une rétraction d'algèbre de Hopf pour l'inclusion $MPR \subset WHA_{inj}$.*

Notons que cette rétraction est différente de celle qu'on peut obtenir grâce à (102) restreinte à $WHA_{inj} \subset dWHA$.

Démonstration : Cela résulte presque directement de ce qui a déjà été fait. En effet, on a pu observer que, si α est une composition, si $\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$ est la substitution associée écrite de façon canonique, les indices des lettres composant σ sont précisément donnés par la standardisation surjective de σ. De plus, la substitution associée à $st_{surj}(\alpha)$ a le même mot du bas σ, et pour mot du haut le mot obtenu à partir de ρ en enlevant toute multiplicité (i.e. en prenant $r_i = 1$ pour tout i). Ainsi, l'application std_{surj} agit sur les substitutions simplement en retirant toute multiplicité pour le mot du haut dans la substitution. Il est alors facile de constater que std_{surj} est un morphisme d'algèbres de Hopf à valeur dans WHA_{surj}. C'est de plus l'identité sur WHA_{surj}, ce qui fournit une rétraction d'algèbres de Hopf pour l'inclusion $WHA_{surj} \subset WHA$. Si enfin on restreint cette application à WHA_{inj}, l'image est clairement contenue dans MPR. On obtient donc par restriction une rétraction d'algèbres de Hopf pour $MPR \subset WHA_{inj}$.

□

Une autre standardisation : On peut associer une permutation à toute composition de la manière suivante : soit $\tau = [t_1, \ldots, t_n]$ une composition, $msupp(\tau) = \{t_1^{r_1}, \ldots, t_n^{r_n}\}$ son multisupport, avec $t_1 < \ldots < t_n$. Pour tout i, remplaçons les r_i entrées dans τ qui sont égales à t_i par les entiers $r_1 + \ldots + r_{i-1} + 1, \ldots, r_1 + \ldots + r_i$ dans cet ordre, en posant $r_0 = 0$. On obtient par ce procédé une permutation qu'on note $st(\tau)$. Par exemple, $st([4, 3, 3, 7, 4, 8, 4]) = [3, 1, 2, 6, 4, 7, 5]$. Soit $st : WHA \longrightarrow MPR$ le morphisme de groupes abéliens libres correspondant. On vérifie facilement que st est un morphisme d'algèbres, mais pas de cogèbres (reprendre les exemples de coproduits calculés à la section 2.1.1). On définit ainsi une rétraction d'algèbres pour l'inclusion $MPR \subset WHA$, mais ce n'est pas une rétraction d'algèbres de Hopf.

Autre graduation : Pour l'algèbre de Hopf $dWHA$, le mot du haut et le mot du bas sont considérés de manière similaire. Mais pour la plupart des autres algèbres de doubles mots, le mot de bas joue un rôle plus "important", et il peut être intéressant alors de définir une nouvelle graduation en prenant pour degré la longueur du mot du bas dans la substitution. On obtient toujours des algèbres de Hopf graduées connexes. Mais à la différence de la graduation considérée jusque maintenant, ici les composantes homogènes sont de rang fini.

2.2.6 Composition et cocomposition, secondes multiplications et comultiplications dans les algèbres de Hopf de mots

Toutes les sous-algèbres de Hopf de $dWHA$ sont des modules d'endomorphismes de *Shuffle* (ou de façon duale de *LieHopf*), et la composition des endomorphismes définit une seconde multiplication pour ces algèbres de Hopf de mots. Mais cette loi n'a pas spécialement de propriétés de distributivité. Par exemple, elle n'est pas nécessairement distributive par rapport au premier produit au sens des algèbres de Hopf : pour que la seconde multiplication m_Π de l'algèbre de Hopf $(H, m_\Sigma, \Delta_\Sigma)$ soit distributive à gauche, le diagramme suivant doit commuter :

$$\begin{tikzcd}
H^{\otimes 3} \arrow[r, "Id\otimes m_\Sigma"] \arrow[d, "\Delta_\Sigma\otimes Id\otimes Id"'] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "m_\Pi"] \\
H^{\otimes 4} \arrow[d, "Id\otimes\tau\otimes Id"'] & H \\
H^{\otimes 4} \arrow[r, "m_\Pi\otimes m_\Pi"] & H^{\otimes 2} \arrow[u, "m_\Sigma"']
\end{tikzcd} \tag{104}$$

soit, avec les notations de Sweedler, pour tout $x, y, z \in H$:

$$x \times_\Pi (y \times_\Sigma z) = \sum_x (x^{(1)} \times_\Pi y) \times_\Sigma (x^{(2)} \times_\Pi z)$$

Il peut toutefois arriver que la composition induise une seconde multiplication qui soit distributive par rapport à la première. Prenons par exemple le cas de l'algèbre de Hopf des fonctions non commutatives symétriques, dont on verra dans la suite qu'elle est une sous-algèbre de Hopf de $MPR \subset dWHA$. Ici, la composition (dans MPR, i.e. la composition de permutations) induit une seconde multiplication dans $NSym$ qui est distributive à gauche par rapport à la première (mais pas distributive à droite)[8]. Et même si d'en d'autres cas, il n'y a pas de propriété de distributivité, ou d'autres propriétés intéressantes, il peut être utile de disposer d'une autre manière de produire un nouvel élément à partir de deux autres.

Prenons à présent le cas de $dWHA$ et de ces diverses sous-algèbres de Hopf, et voyons comment se composent des substitutions. Soit donc $p = \begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}, p' = \begin{pmatrix}\rho'\\ \sigma'\end{pmatrix}$ deux substitutions. Leur composée (en tant qu'endomorphismes de *Shuffle*) est non-nul si et seulement si il existe une surjection $\Phi : supp(\rho) \longrightarrow supp(\sigma')$ telle que Φ_* envoie ρ sur σ'. Et dans ce cas, la composée de ces deux substitutions (second produit) est donnée par :

$$m_\Pi(p \otimes p') = p \circ p' = \begin{pmatrix}\rho'\\ \Phi_*(\sigma)\end{pmatrix} \tag{105}$$

où $\Phi_*(\sigma)$ est le mot obtenu en appliquant le changement de variables Φ au mot σ, qui a bien le même support que ρ. Il est facile de voir que toutes les sous-algèbres de Hopf WHA, WHA_{inj}, WHA_{surj}, MPR, $dWHA(b)$, $dWHA_{msupp}$ sont stables par cette seconde multiplication.

Dualement, et sous réserve d'avoir un sens, on obtient un coproduit. Il est donné par la formule :

$$\Delta_\Pi\left(\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}\right) = \sum \begin{pmatrix}\tau\\ \sigma\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\rho\\ \tau\end{pmatrix} \tag{106}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des éléments τ de même support que ρ et σ, et pour lesquels chacun des deux facteurs dans (106) appartient à une sous-algèbre de Hopf appropriée. Montrons (106) sous réserve d'existence de Δ_Π : on considère ici $\langle .,.\rangle'$ le produit scalaire sur $dWHA$ pour lequel les substitutions forment une base orthonormale, $H \subset dWHA$ une sous-algèbre de Hopf, et $p, p', p'' \in H$ des substitutions, alors :

- $\langle \Delta_\Pi(p), p' \otimes p''\rangle' = \langle p, m_\Pi(p' \otimes p'')\rangle' = 0$ s'il n'existe pas de surjection $\Phi : supp(\rho') \to supp(\sigma'')$ telle que Φ_* envoie ρ' sur σ''.
- S'il existe une surjection $\Phi : supp(\rho') \to supp(\sigma'')$ telle que Φ_* envoie ρ' sur σ'', alors :

$$\langle \Delta_\Pi(p), p' \otimes p''\rangle' = \left\langle p, \begin{pmatrix}\rho''\\ \Phi_*(\sigma')\end{pmatrix}\right\rangle' = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists \Psi : supp(\rho'') \to supp(\rho) : \Psi_*(\rho'') = \rho, \\ & \Psi_* \circ \Phi_*(\sigma') = \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $\langle \Delta_\Pi(p), p' \otimes p''\rangle' = 1$ si et seulement si $p' \otimes p'' = \begin{pmatrix}\rho'\\ \sigma'\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\rho''\\ \sigma''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Phi_*(\rho')\\ \Phi_*(\sigma')\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\rho''\\ \sigma''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_*(\sigma'')\\ \Psi_* \circ \Phi_*(\sigma')\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\Psi_*(\rho'')\\ \Psi_*(\sigma'')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Psi_*(\sigma'')\\ \sigma\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\rho\\ \Psi_*(\sigma'')\end{pmatrix}$. D'où la formule (106) pour Δ_Π.

Notons que dans le cas de $dWHA$ et WHA, il existe une infinité d'éléments τ vérifiant ces conditions, et le coproduit n'est alors pas défini. Dans le cas des sous-algèbres de Hopf WHA_{inj}, WHA_{surj}, MPR, $dWHA(b)$, $dWHA_{msupp}$, ces éléments sont en nombre fini, et le coproduit ainsi défini a bien un sens.

[8]voir la section 2.3.1 sur ce point.

2.3 Liens entre les algèbres de Hopf *Sym*, *NSym*, *QSym* et *MPR*

On s'intéresse à présent aux liens existant entre les algèbres de Hopf *Sym*, *NSym*, *QSym* et *MPR*, résumés par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(MPR, m', \Delta') \arrow[ddr, dotted, no head] & Sym \arrow[d, "i'"] \arrow[ddl, dotted, no head] \\
NSym \arrow[u, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[r, dotted, no head] & QSym \\
Sym & (MPR, m, \Delta) \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd} \tag{107}$$

où l'on a indiqué par des pointillés les algèbres en dualité. Les morphismes d'algèbres de Hopf π et π' sont surjectifs, et les morphismes d'algèbres de Hopf i, i' sont injectifs. De plus, les morphismes π et i sont duaux l'un de l'autre, tout comme π' et i'. Les parties du diagramme qui ne concernent pas l'algèbre de Hopf *MPR* ont déjà été discutées auparavant (voir section 1.2.4). Il reste donc à étudier les parties du diagramme qui concernent l'une ou l'autre des deux structures d'algèbre de Hopf sur *MPR* (qui sont isomorphes).

Notons par ailleurs que l'on peut changer la paire (MPR, m', Δ') et (MPR, m, Δ) dans le diagramme (107), mise en dualité via le crochet de Hopf $\langle ., . \rangle'$ pour lequel les permutations forment une base orthonormale, par l'algèbre de Hopf auto-duale (MPR, m, Δ), le crochet de Hopf étant alors donné par (101). Un diagramme similaire s'en déduit, en remplaçant i par $(\sigma \mapsto \sigma^{-1}) \circ i$, et l'algèbre de Hopf (MPR, m', Δ') par (MPR, m, Δ) (ou en remplaçant π par $\pi \circ (\sigma \mapsto \sigma^{-1})$, et l'algèbre de Hopf (MPR, m, Δ) par (MPR, m', Δ')).

2.3.1 L'injection d'algèbres de Hopf $i : NSym \longrightarrow MPR$

Soit $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ une permutation. On appelle ensemble des descentes de σ, et on note $desc(\sigma)$, le sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ constitué de tous les $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ tels que $s_i > s_{i+1}$. Il est important de noter qu'un ensemble de descentes n'est pas seulement un ensemble, mais un sous-ensemble d'un ensemble spécifique $\{1, \ldots, n\}$. Ainsi, $\{1\} \subset \{1, 2\}$, est très différent de $\{1\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Exemples

- $desc([3, 2, 5, 7, 1, 4, 6]) = \{1, 4\} \subset \{1, 2, \ldots, 6\}$.
- Si $desc(\sigma) = \varnothing \subset \{1, \ldots, m-1\}$, $\sigma = [1, \ldots, m]$.
- Si $desc(\sigma) = \{i\} \subset \{1, \ldots, m-1\}$, σ est un $(i, m-i)$-battage.

Considérons un ensemble de descentes $D = \{d_1 < \ldots < d_r\} \subset \{1, 2, \ldots, m-1\}$. On lui associe une composition de poids m en posant $comp(D) = [d_1, d_2 - d_1, \ldots, d_r - d_{r-1}, m - d_r]$. Inversement, si $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$ est une composition de poids $wt(\alpha) = m$, on lui associe un ensemble de descentes $desc(\alpha) = \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{r-1}\} \subset \{1, \ldots, m-1\}$. Les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de l'autre. Il est important de noter que $desc(\sigma)$ pour σ une permutation, et $desc(\alpha)$ pour α une composition, sont deux notions différentes.

L'injection $i : NSym \longrightarrow MPR$:

Considérons le morphisme d'algèbres i défini par :

$$S_n \overset{i}{\longmapsto} [1, 2, \ldots, n] \tag{108}$$

i.e. on associe à la fonction symétrique homogène complète non commutative S_n la permutation identité à n lettres. Comme l'on sait que les S_n engendrent librement l'algèbre associative *NSym*, (108) définit bien un morphisme d'algèbres. Il est homogène (de degré 0), puisque les S_n sont homogènes de degré n. C'est de plus un morphisme d'algèbres de Hopf. Pour voir celà, il suffit de regarder sur les générateurs S_n. Or, on a vu :

$$\Delta_{NSym}(S_n) = \sum_{i+j=n} S_i \otimes S_j$$

où $S_0 = 1$. Comme de plus, on a :

$$\begin{aligned}\Delta'_{MPR}([1,2,\ldots,n]) &= \sum_{i=0}^{n}[1,2,\ldots,n]_{\{1,\ldots,i\}} \otimes st([1,2,\ldots,n]_{\{i+1,\ldots,n\}}) \\ &= \sum_{i=0}^{n}[1,2,\ldots,i] \otimes [1,2,\ldots,n-i]\end{aligned}$$

(108) est bien un morphisme d'algèbres de Hopf.

Montrons que ce morphisme est injectif. Pour cela, une étude plus approfondie est nécessaire. Rappelons que, pour toutes permutations $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$ et $\tau = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$, le produit $m'_{MPR}(\sigma \otimes \tau)$ est donné par la formule :

$$m'_{MPR}(\sigma \otimes \tau) = \sum u \star v$$

où la somme est prise sur l'ensemble des paires de mots (u, v) telles que $supp(u) \cup supp(v) = \{1, 2, \ldots, m+n\}$, $st(u) = \sigma$, $st(v) = \tau$, et où $u \star v$ désigne le produit de concaténation des mots u et v.

On étudie les ensembles de descentes de chacun des termes de cette somme. L'ensemble de descentes d'un terme $u \star v$ de cette somme est égal à $desc(\sigma) \cup m + desc(\tau) \subset \{1, \ldots, m+n\}$ si la dernière lettre de la composition u est plus petite que la première lettre de v, et à $desc(\sigma) \cup \{m\} \cup m + desc(\tau) \subset \{1, \ldots, m+n\}$ si la dernière lettre de la composition u est plus grande que la première lettre de v. De plus, ces deux ensembles de descentes possibles sont bien obtenus pour certains termes de la somme : par exemple, le premier ensemble de descentes est obtenu pour $u = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$, $v = [m+t_1, m+t_2, \ldots, m+t_n]$, et le deuxième ensemble de descentes est obtenu pour $u = [n+s_1, n+s_2, \ldots, n+s_m]$, $v = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$.

Par ce qu'on vient de faire et en utilisant l'associativité du produit, on a donc montré que le plus grand ensemble de descentes (i.e. de cardinal maximal) parmis ceux des termes du produit itéré des permutations identités suivant :

$$m'_{MPR}{}^{(m-1)}([1, \ldots, a_1] \otimes [1, \ldots, a_2] \otimes \ldots \otimes [1, \ldots, a_m])$$

est donné par $\{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{m-1}\}$. Et cet ensemble de descentes correspond par exemple au terme suivant du produit itéré :

$$\begin{gathered}[n - a_1 + 1, n - a_1 + 2, \ldots, n; n - a_1 - a_2 + 1, n - a_1 - a_2 + 2, \ldots, n - a_1; \ldots \\ \ldots; n - a_1 - a_2 - \ldots - a_m + 1 = 1, \ldots, n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{m-1} = a_m]\end{gathered}$$

en notant $n = wt(\alpha) = a_1 + \ldots + a_m$. Puisque ces ensembles de descentes sont tous différents et sont uniquement déterminés par $a_1, a_2, \ldots, a_m$, les monômes en les permutations identités forment une famille libre dans *MPR*. Ce qui montre que le morphisme défini par (108) est injectif.

On va donner une forme plus explicite du morphisme (108). Soit pour cela $D \subset \{1, \ldots, m-1\}$. Une classe de descentes dans MPR est l'ensemble des permutations (de même longueur) ayant le même ensemble de descentes. La somme de la classe de descentes correspondante à D est définie par :

$$\vartheta_D = \sum_{desc(\sigma)=D} \sigma \in MPR \tag{109}$$

où la somme est prise sur la classe de descentes correspondante à D, i.e. sur l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, m\}$ dont l'ensemble de descentes est D. Soit $D' \subset \{1, \ldots, n-1\}$ un autre sous-ensemble, notons $D_1 = D \cup m + D' \subset \{1, 2, \ldots, m+n-1\}$, $D_2 = D \cup \{m\} \cup m + D' \subset \{1, 2, \ldots, m+n-1\}$.

Lemme 52 *On a l'égalité suivante :*

$$m'_{MPR}(\vartheta_D \otimes \vartheta_{D'}) = \vartheta_{D_1} + \vartheta_{D_2} \tag{110}$$

Démonstration : Commençons par noter qu'il n'y a pas de multiplicité dans le produit $m'_{MPR}(\vartheta_D \otimes \vartheta_{D'})$: en effet, si $u \star v = u' \star v'$ et si u et u' sont de même longueur (égale à m), alors $u = u'$ et $v = v'$. De plus, on déduit de ce qui a été fait précédement que les termes de la somme de gauche dans (110), obtenus en faisant le produit de ϑ_D et de $\vartheta_{D'}$, apparaissent tous dans la somme de droite (à une multiplicité un). Inversement, soit τ une permutation de $\{1, 2, \ldots, m+n\}$ d'ensemble de descentes D_1 ou D_2. Si $\tau = u \star v$ est une coupe de τ avec u de longueur m, v de longueur n, alors $D = desc(st(u))$ et $D' = desc(st(v))$. Ainsi, τ est l'un des termes de la somme de gauche dans (110). Ce qui prouve cette égalité.

□

On a introduit la base des fonctions de Schur R_α dans *NSym*. Rappelons la formule (48) du produit de deux fonctions de Schur :

$$R_{[a_1,\ldots,a_m]} R_{[b_1,\ldots,b_n]} = R_{[a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n]} + R_{[a_1,\ldots,a_m+b_1,\ldots,b_n]}$$

D'autre part, si $D \subset \{1, \ldots, m-1\}$ est un ensemble de descentes associé à la composition $[a_1, a_2, \ldots, a_r]$ de poids m, et $D' \subset \{1, \cdots, n-1\}$ est un ensemble de descentes associé à la composition $[b_1, b_2, \ldots, b_s]$ de poids n, alors :

$$\begin{aligned} &desc([a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s]) \\ &\quad = \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_r = m, m + b_1, \ldots, m + b_1 + \ldots + b_{s-1}\} \\ &\quad = D \cup \{m\} \cup m + D' \subset \{1, 2, \ldots, m+n-1\} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} &desc([a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r + b_1, b_2, \ldots, b_s]) \\ &\quad = \{a_1, \ldots, a_1 + \ldots + a_{r-1}, a_1 + \ldots + a_r + b_1 = m + b_1, \ldots, m + b_1 + \ldots + b_{s-1}\} \\ &\quad = D \cup m + D' \subset \{1, 2, \ldots, m+n-1\} \end{aligned}$$

Il est maintenant possible d'en déduire une forme explicite pour le morphisme (108) :

Théorème 53 *L'application i : $NSym \longrightarrow (MPR, m'_{MPR}, \Delta'_{MPR})$, morphisme d'algèbres de Hopf homogène injectif, est donnée par :*

$$R_\alpha \longmapsto \vartheta_{desc(\alpha)} = \sum_{desc(\sigma)=desc(\alpha)} \sigma \tag{111}$$

Dans (111), on fera attention au sens de $desc$: $desc(\sigma)$ est l'ensemble de descentes de la permutation σ, tandis que $desc(\alpha)$ est l'ensemble de descentes correspondant à la composition α.

Démonstration : L'ensemble des fonctions de Schur R_α étant une base du $\mathbb{Z}$-module *NSym*, (111) définit bien une application linéaire injective. C'est de plus un morphisme d'algèbres grâce à (48), à (110) et au calcul effectué sur les ensembles de descentes de compositions. Comme enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il envoie $R_{[n]} = S_n$ sur $[1, 2, \ldots, n]$, c'est donc le morphisme d'algèbres de Hopf $i : NSym \longrightarrow (MPR, m'_{MPR}, \Delta'_{MPR})$.

□

L'algèbre de descentes :

Étant donné ce qui a été fait auparavant, $m'_{MPR}(\vartheta_D \otimes \vartheta_{D'})$ est une somme de classes de descentes. De plus, les sommes de classes de descentes (les ϑ_D) forment une base de l'image de (111). Cette image est isomorphe à *NSym* comme algèbre de Hopf. On l'appelle l'algèbre de descentes de Solomon, et on la note Σ.

On peut munir Σ d'une seconde multiplication m_Σ donnée par la composition des permutations, dont on peut montrer qu'elle est distributive à gauche par rapport à la première multiplication m'_{MPR}. On a alors le résultat suivant, dû à Solomon[9] :

Théorème 54 (Σ, m_Σ) *est une sous-algèbre de MPR.*

Le produit m_Σ induit un nouveau produit m_Π sur *NSym*, distributif à gauche par rapport à la première multiplication m_{NSym}. Puisque la composée de deux permutations identités est zéro (si elles ne sont pas de même longueur) ou est la même permutation identité (si elles ont la même longueur), le second produit ainsi obtenu sur *NSym* est donné par :

$$\begin{array}{c} m_\Pi(S_n \otimes S_n) = S_n \\ m_\Pi(S_\alpha \otimes S_\beta) = 0 \quad \text{si} \quad wt(\alpha) \neq wt(\beta) \end{array} \tag{112}$$

Grâce à la distributivité à gauche et aux propriétés de graduations, (112) suffit à déterminer le second produit. Étant donné la construction effectuée, on a donc obtenu le résultat suivant :

Théorème 55 *L'algèbre* $(NSym, m_\Pi)$ *est isomorphe à l'algèbre de descentes de Solomon* (Σ, m_Σ)*, l'isomorphisme étant donné par* $R_\alpha \mapsto \vartheta_{desc(\alpha)}$.

Par dualité, le produit m_Π induit un coproduit Δ' sur *QSym*, dont on peut montrer qu'il est défini comme suit[10] : Soient X, Y deux ensembles infinis totalement ordonnés et disjoints de variables qui commutent. On ordonne $Z = XY$ par :

$$xy < x'y' \text{ si } x < x' \text{ ou } x = x' \text{ et } y < y'$$

Δ' est alors défini sur *QSym* par :

$$\begin{aligned} \Delta'(F) &= \sum_i G_i \otimes H_i \\ F(xy) &= \sum_i G_i(y) H_i(x) \end{aligned}$$

où $F(xy)$ est la fonction quasi-symétrique F évaluée sur l'ensemble totalement ordonné Z, et où le membre de droite est son image canonique dans $\mathbb{Z}[X \cup Y]$.

[9] voir [14] pour une démonstration.
[10] voir [2] pour ce résultat.

La projection $\pi : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow QSym$:

Théorème 56 *L'application $i : NSym \longrightarrow (MPR, m'_{MPR}, \Delta'_{MPR})$ induit par dualité une projection $\pi : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow QSym$, morphisme d'algèbres de Hopf homogène et surjectif, donné de façon explicite par :*

$$\sigma \longmapsto F_{comp(desc(\sigma))} \tag{113}$$

Démonstration : Rappelons plusieurs points. On munit MPR du produit scalaire $\langle .,. \rangle'$ pour lequel les permutations forment une base orthonormale. On a vu qu'on définissait alors un crochet de Hopf entre (MPR, m, Δ) et (MPR, m', Δ'), permettant d'identifier le dual gradué de (MPR, m', Δ') avec (MPR, m, Δ). On a également défini un crochet de Hopf sur le groupe abélien de base les compositions, donné par $\langle F_\alpha, R_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$, permettant d'identifier $NSym^*$, dual gradué de $NSym$, et $QSym$.

Le premier point en découle alors directement par dualité. Plus précisément, montrons que π est donné de manière explicite par (113). Considérons $i^* : (MPR^*, \Delta'^*_{MPR}, m'^*_{MPR}) \to NSym^*$ le morphisme obtenu par dualité à partir de i. Soit $f \in MPR^*$, et $\sigma \in MPR$ tel que $f = \langle \sigma, . \rangle'$. On a :

$$i^*(f) = f \circ i = \langle \sigma, i(.) \rangle' = \sum_\beta \lambda_\beta R^*_\beta$$

Or :

$$f \circ i(R_\alpha) = \langle \sigma, i(R_\alpha) \rangle' = \sum_{desc(\tau) = desc(\alpha)} \langle \sigma, \tau \rangle' = \begin{cases} 1 & \text{si } desc(\alpha) = desc(\sigma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $f \circ i = R^*_{comp(desc(\sigma))}$. Et puisque $\langle R_\alpha, F_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$, on obtient donc finalement $\pi(\sigma) = F_{comp(desc(\sigma))}$.

$\square$

Nous verrons dans la suite que la projection (113) peut s'interpréter de façon naturelle[11].

2.3.2 Relations d'ordre dans les classes de descentes

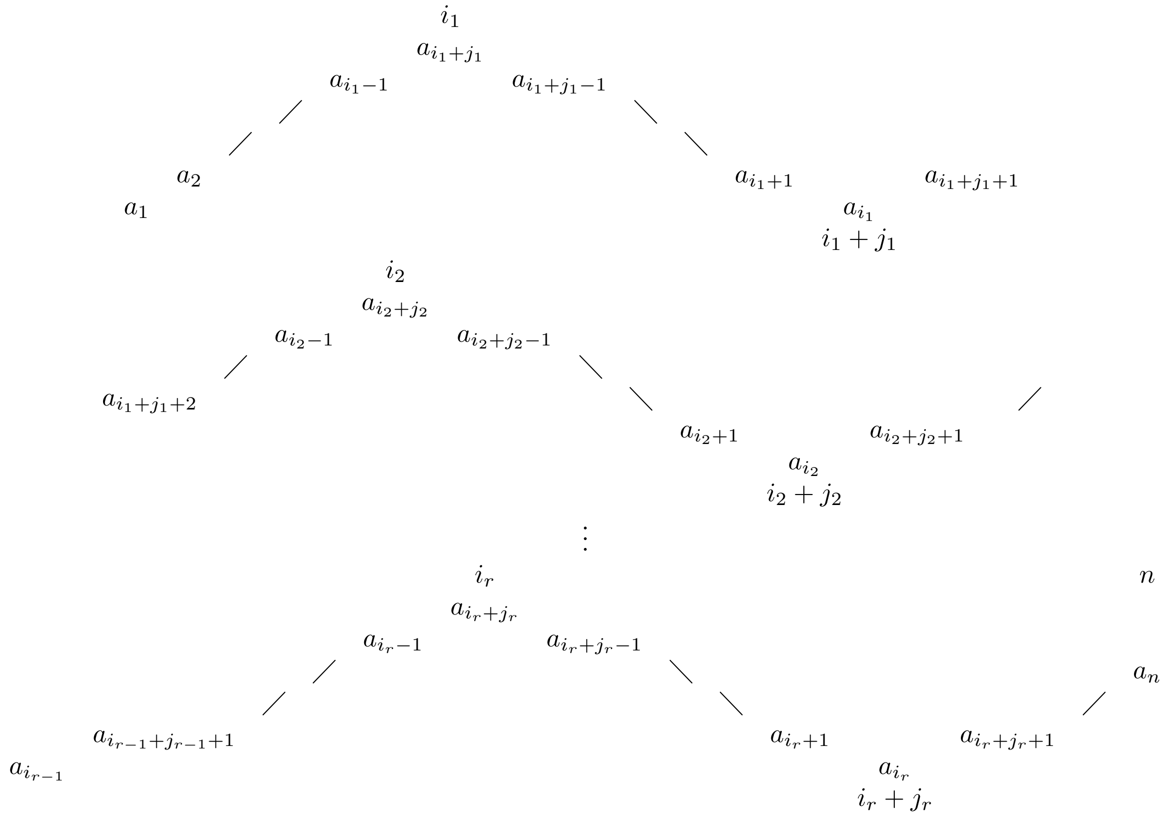
Dans la suite, il sera commode de considérer des permutations pour d'autres sous-ensembles de $\mathbb{N}$ que $\{1, \ldots, n\}$. Ainsi, toute composition injective peut être vu comme une permutation pour le sous-ensemble formé de son support. On définit comme précédement l'ensemble des descentes d'une permutation $\sigma = [b_1, \ldots, b_n]$ par : $i \in desc(\sigma)$ ssi $b_i > b_{i+1}$. c'est un sous-ensemble de $supp(\sigma)$. Soit D un sous-ensemble non-vide de $\{1, \ldots, n-1\}$, on l'écrit dans la suite sous la forme :

$$D = \{i_1, i_1 + 1, \ldots, i_1 + j_1 - 1; i_2, i_2 + 1, \ldots, i_2 + j_2 - 1; \ldots; i_r, i_r + 1, \ldots, i_r + j_r - 1\} \tag{114}$$

avec $i_s, j_s \in \mathbb{N}$, $i_s - (i_{s-1} + j_{s-1} - 1) \geqslant 2$. Par exemple, si $D = \{1, 2, 6, 7\} \subset \{1, 2, \ldots, 7\}$, $i_1 = 1$, $j_1 = 2$, $i_2 = 6$, $j_2 = 2$, $r = 2$.

Considérons à présent un alphabet $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n\} \subset \mathbb{N}$ de taille n, et la permutation suivante de cet ensemble :

[11] voir la section 2.3.6.



(115)

où les positions relatives de chaque élément sont prises selon l'ordre des éléments dans $\mathbb{N}$, et où les entiers occasionnels sur les lignes du haut ou du bas indiquent la position dans la permutation. Par exemple, la lettre a_{i_1} est la $(i_1 + j_1)$-ième lettre de la permutation. Bien-sûr, si $i_1 = 1$, la permutation ne commence pas par une "ascention". De même, la dernière ascention peut ne pas être si $i_r + j_r = n$. L'ensemble des descentes de la permutation (115) est l'ensemble D donné par (114).

Théorème 57 *La permutation* (115) *est la plus petite permutation pour l'ordre lexicographique dans la classe de descentes de l'ensemble des permutations de* $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$*, dont l'ensemble de descentes* D *est donné par* (114).

La plus petite permutation pour une classe de descentes donnée sera appelée dans la suite une *lsd permutation* (pour **l**exicographically **s**mallest in its **d**escent class). Si $D = \varnothing$, il n'y a qu'une permutation de classe de descentes D, la permutation identité.

Démonstration : On procède par récurrence sur la taille de l'alphabet. La propriété est triviale pour un alphabet de taille 1 ou 2. Supposons la propriété au rang $n-1$. Considérons un alphabet $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n\} \subset \mathbb{N}$ de taille n, et un ensemble de descentes D de la forme (114). On a deux cas à considérer :

(i) $1 \in D$, i.e. $i_1 = 1$

(ii) $1 \notin D$, i.e. $i_1 > 1$

Dans le deuxième cas *(ii)*, la permutation (115) commence par l'élément a_1, le plus petit élément de l'alphabet considéré. En ôtant cet élément de l'alphabet et de la permutation (115), on obtient une permutation de même type dont l'ensemble de descentes est $D - 1 \subset \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Par hypothèse de récurrence, (115) auquel on a retiré l'élément a_1 est la plus petite permutation pour l'ordre lexicographique dans cette classe de descentes. Et comme a_1 est le plus petit élément de l'alphabet, (115) est la plus petite permutation pour l'ordre lexicographique dans la classe de descentes définie par D.

Dans le premier cas (i), l'ensemble de descentes commence par j_1 descentes consécutives. Ainsi, une permutation ayant cet ensemble de descentes doit commencer par a_{j_1+1}, ou par un élément plus grand. La permutation (115) commence dans ce cas précisément par l'élément a_{j_1+1}. Ôtons cet élément de l'alphabet et de (115). Il en résulte une permutation de même forme, dont l'ensemble de descentes est $D\backslash\{1\} - 1 \subset \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Par hypothèse de récurrence, cette permutation est la plus petite permutation pour l'ordre lexicographique dans cette classe de descentes. Il suit que (115) est la plus petite permutation pour l'ordre lexicographique dans la classe de descentes définie par D.

$\square$

On peut réécrire la permutation (115) de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_{i_1-1} & ; & a_{i_1} & a_{i_1+1} & \ldots & a_{i_1+j_1} & ; & a_{i_1+j_1+1} & \ldots & a_{i_2-1} & ; \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{i_1-1} & ; & a_{i_1+j_1} & a_{i_1+j_1-1} & \ldots & a_{i_1} & ; & a_{i_1+j_1+1} & \ldots & a_{i_2-1} & ; \\ & a_{i_2} & \ldots & a_{i_2+j_2} & ; & \ldots & ; & a_{i_r} & \ldots & a_{i_r+j_r} & ; & a_{i_r+j_r+1} & \ldots & a_n \\ & a_{i_2+j_2} & \ldots & a_{i_2} & ; & \ldots & ; & a_{i_r+j_r} & \ldots & a_{i_r} & ; & a_{i_r+j_r+1} & \ldots & a_n \end{array} \right) \quad (116)$$

Écrit sous cette façon, il est alors clair qu'une lsd permutation est toujours une involution. On a également le résultat suivant (qui découle directement de l'écriture d'une lsd permutation sous la forme (115) ou (116)) :

Proposition 58 *Soit $\sigma = u \star v$ une coupe d'une lsd permutation. Alors u et v sont des lsd permutations également (dans leurs alphabets respectifs).*

Notons que si la coupe est prise lors d'une "ascention", alors l'alphabet de u est de la forme $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_i\}$ (et celui de v est de la forme $\{a_{i+1} < a_{i+2} < \ldots < a_n\}$), mais si la coupe est prise lors d'une "descente", ce n'est pas le cas. Par exemple, pour la lsd permutation :

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & ; & 3 & 4 & 5 & 6 & ; & 7 & ; & 8 & 9 & 10 & ; & 11 & 12 \\ 1 & 2 & ; & 6 & 5 & 4 & 3 & ; & 7 & ; & 10 & 9 & 8 & ; & 12 & 11 \end{array} \right)$$

et pour la coupe $\sigma = u \star v$ avec u de longueur 9 et v de longueur 3, l'alphabet de u est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ et celui de v est $\{8, 11, 12\}$.

2.3.3 Rétractions de i : $NSym \rightarrow MPR$ et sections de π : $MPR \rightarrow QSym$

Dans cette section, on examine la question de l'existence de rétractions de $i : NSym \rightarrow MPR$, qui soient des morphismes d'algèbres. De façon duale, cela revient à étudier les sections de $\pi : MPR \rightarrow QSym$ qui soient des morphismes de cogèbres.

Soit J_{nonlsd} le sous-groupe de MPR engendré par les permutations qui ne sont pas des lsd permutations.

Proposition 59 *J_{nonlsd} est un idéal gradué de l'algèbre (MPR, m').*

Démonstration : C'est une conséquence directe de la proposition 58. En effet, soient σ et τ deux permutations, et supposons qu'au moins l'une des deux ne soit pas une lsd permutation. Considérons un terme $u \star v$ apparaissant dans le produit $m'(\sigma \otimes \tau)$. Si c'est une lsd permutation, alors u et v seraient des lsd permutations. Or, u est une lsd permutation si et seulement si $st(u)$ est une lsd permutation. Mais $st(u) = \sigma$ et $st(v) = \tau$, d'où une contradiction. Ce qui prouve que J_{nonlsd} est un idéal de l'algèbre (MPR, m'). Il est enfin gradué, puisqu'il est engendré comme groupe par des éléments homogènes.

$\square$

Théorème 60 *Définissons $\psi : (MPR, m') \longrightarrow NSym$ par :*

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \text{ n'est pas une lsd permutation} \\ R_{comp(desc(\sigma))} & \text{si } \sigma \text{ est une lsd permutation} \end{cases} \tag{117}$$

Alors ψ est un morphisme d'algèbres homogène, et est une rétraction du morphisme d'algèbres de Hopf $i : NSym \to (MPR, m')$.

Démonstration : Par définition, voir aussi (111), on a $\psi \circ i = Id_{NSym}$.
Reste à montrer que ψ préserve la multiplication : soient σ et τ deux permutations, et supposons qu'au moins l'une d'entre elles ne soit pas une lsd permutation. Alors, leur produit appartient à l'idéal J_{nonlsd}, et on a bien $\psi \circ m'(\sigma \otimes \tau) = 0 = m_{NSym} \circ (\psi \otimes \psi)(\sigma \otimes \tau)$. ψ est donc multiplicative dans ce cas.
Soient maintenant σ et τ deux lsd permutations, et notons $D \subset \{1, 2, \ldots, m-1\}$ et $D' \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ les ensembles de descentes respectifs, $comp(D) = [a_1, a_2, \ldots, a_r]$, $comp(D') = [b_1, b_2 \ldots, b_s]$. Comme précédement, on note $D_1 = D \cup m + D' \subset \{1, 2, \ldots, m+n-1\}$, $D_2 = D \cup \{m\} \cup m + D' \subset \{1, 2, \ldots, m+n-1\}$. Soit ρ_i l'unique lsd permutation dont l'ensemble de descentes est D_i, $i = 1, 2$. Il suffit de regarder si les ρ_i apparaissent dans $m'(\sigma \otimes \tau)$ (rappelons que $m'(\sigma \otimes \tau)$ est une somme de permutations sans multiplicité). En effet, on aura alors :

$$\begin{aligned} \psi(m'(\sigma \otimes \tau)) &= \psi(\rho_1) + \psi(\rho_2) = R_{comp(D_1)} + R_{comp(D_2)} \\ &= R_{[a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s]} + R_{[a_1, a_2, \ldots, a_r + b_1, b_2, \ldots, b_s]} \\ &\overset{(48)}{=} R_{comp(desc(\sigma))} R_{comp(desc(\tau))} = \psi(\sigma)\psi(\tau) \end{aligned}$$

Soit donc $\rho_i = u_i \star v_i$ une coupe de ρ_i, avec u_i de longueur m, v_i de longueur n. Par la proposition 58, u_i et v_i sont des lsd permutations. Il en est de même de $st(u_i)$ et de $st(v_i)$, dont les ensembles de descentes sont respectivements D et D'. Par unicité dans le théorème 57, $st(u_i) = \sigma$ et $st(v_i) = \tau$. D'où finalement le résultat.

$\square$

Remarque 61 *Il n'est pas difficile de donner une formule explicite pour les ρ_i. En effet, puisque σ et τ sont des lsd permutations, elles sont de la forme $\sigma = [s_1, \ldots, s_{p-1}, s_p = m, m-1, \ldots, p]$ et $\tau = [q, q-1, \ldots, 1, t_{q+1}, \ldots, t_n]$ (où bien sûr il est possible que $m = p$, si σ se termine par une "ascention", et que $q = 1$, si τ commence par une "ascention"). Alors :*

$$\rho_1 = [s_1, \ldots, s_{p-1}, s_p = m, m-1, \ldots, p, m+q, m+q-1, \ldots, m+1, m+t_{q+1}, \ldots, m+t_n]$$

est une lsd permutation d'ensemble de descentes D_1, et :

$$\rho_2 = [\underbrace{s_1, \ldots, s_{p-1}}_{\text{alphabet}\{1,\ldots,p-1\}}, \underbrace{m+q, m+q-1, \ldots, p+q, p+q-1, \ldots, p}_{\text{alphabet}\{p,\ldots,m+q\}}, \underbrace{m+t_{q+1}, \ldots, m+t_n}_{\text{alphabet}\{m+q+1,\ldots,m+n\}}]$$

est une lsd permutation d'ensemble de descentes D_2.

Soit MPR_{lsd} le groupe abélien libre engendré par les lsd permutations. Par la proposition 58, MPR_{lsd} est une sous cogèbre de (MPR, Δ)[12].

[12] C'est aussi une sous-cogèbre de (MPR, Δ') puisque l'isomorphisme $(MPR, \Delta) \to (MPR, \Delta')$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est l'identité sur MPR_{lsd}.

Théorème 62 *Considérons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} MPR_{lsd} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\pi''"'] & MPR \arrow[d, "\pi"] \\ QSym \arrow[r, "="] & QSym \end{tikzcd} \tag{118}$$

où π'' est définie comme la restriction de π à MPR_{lsd}. Alors, π'' est un isomorphisme de cogèbres homogène, et son inverse est une section de la projection d'algèbres de Hopf $\pi : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow QSym$.

Démonstration : Comme composée de deux morphismes de cogèbres, π'' est un morphisme de cogèbres. De plus, pour toute composition α de poids m, il existe une unique lsd permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$ telle que $comp(desc(\sigma)) = \alpha$. Ainsi, π'' est une bijection entre la base formée des lsd permutations dans MPR_{lsd} et la base formée par les F_α dans $QSym$. π'' est donc un isomorphisme de cogèbres.

□

En fait, la section de cogèbres de π du théorème précédent est égale à la section de cogèbres obtenue par dualité à partir du théorème 60 : en effet, soit $\psi^* : NSym^* \to (MPR^*, m'^*)$ le morphisme obtenu à partir de ψ par dualité. Pour toute composition α, et pour toute permutation σ, on a :

$$\psi^*(R^*_\alpha)(\sigma) = R^*_\alpha \circ \psi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est la lsd permutation tq } comp(desc(\sigma)) = \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant les isomorphismes $NSym^* \simeq QSym$ et $(MPR^*, m'^*) \simeq (MPR, \Delta)$, on obtient ainsi un morphisme de cogèbres $QSym \to (MPR, \Delta)$ qui à F_α associe l'unique permutation σ telle que $comp(desc(\sigma)) = \alpha$. C'est de plus, par construction, une section de π. Et c'est très exactement celle définie au théorème 62.

2.3.4 Ordre faible et ensembles de descentes

Soit $Inv(\sigma) = \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} : i < j \text{ et } s_i > s_j\}$ l'ensemble des inversions pour une permutation $\sigma = [s_1, \ldots, s_m] \in S_m$. L'ordre faible à gauche sur S_m est défini par :

$$\sigma <_{ofg} \tau \Leftrightarrow Inv(\sigma) \subset Inv(\tau) \tag{119}$$

On définit ainsi un ordre partiel sur S_m avec un plus petit élément, la permutation identité (d'ensemble d'inversions vide), et avec un plus grand élément, donné par la permutation $[m, m-1, \ldots, 2, 1]$.

À tout ensemble partiellement ordonné P on associe un graphe, appelé diagramme de Hasse, construit ainsi : les éléments de P sont placés verticalement de sorte qu'un élément u est au dessus de v dans le diagramme si et seulement si u est plus grand que v pour l'ordre sur P. De plus, il y a une liaison entre u et v si et seulement si u est plus grand que v et qu'il n'y a pas d'autres éléments de P entre v et u.

Dans le cas de l'ordre faible à gauche défini par (119), on peut montrer que la permutation σ est liée à τ et est au dessus de τ si et seulement si il existe des éléments s_i, s_j avec $i < j$ et

$s_i = s_j + 1$, tels que τ est obtenue à partir de σ en permutant s_i et s_j (et en laissant ses autres éléments inchangés). On construit les diagrammes de Hasse pour l'ordre faible à gauche pour S_2 et S_3 :

$$\begin{array}{c} 21 \\ | \\ 12 \end{array}$$

S_2

$$\begin{array}{ccccc} 321 & & & & \\ | & \diagdown & & & \\ 312 & & 231 & & \\ & \diagdown & & \diagdown & \\ & & 213 & & 132 \\ & & & \diagdown & | \\ & & & & 123 \end{array}$$

S_3

Remarque 63 *L'ordre lexicographique raffine l'ordre faible à gauche dans le sens où :* $\sigma >_{ofg} \tau \Rightarrow \sigma >_{lex} \tau$. *C'est presque immédiat, étant donné la description faite de l'ordre faible dans le diagramme de Hasse.*

Théorème 64 *Soit* $D \subset \{1, \ldots, m-1\}$ *un ensemble de descentes. Alors, le sous-graphe du diagramme de Hasse pour l'ordre faible à gauche formé par la classe de descentes de D, i.e. par les permutations de* S_m *d'ensemble de descentes D, est connexe avec un unique plus petit élément (pour l'ordre faible). Cet élément est une lsd permutation. Cette classe de descentes contient également un unique plus grand élément (pour l'ordre faible), cet élément étant une lld permutation, i.e. la plus grande permutation dans la classe de descentes pour l'ordre lexicographique (**l**exicographically **l**argest in its **d**escent class).*

Démonstration : On démontre ce résultat par récurrence sur la longueur m. Les cas $m = 1, 2$ sont triviaux. Supposons à présent la propriété pour tout $k \leqslant m-1$. Soit $\sigma = [s_1, \ldots, s_m] \in S_m$. On a deux cas à considérer :

(i) $1 \notin D$. Supposons que $s_1 \neq 1$. Comme $s_2 > s_1$, $s_1 - 1 \in \{s_3, \ldots, s_m\}$. Alors, en permutant s_1 et $s_1 - 1$, on obtient une permutation plus petite pour l'ordre faible à gauche, avec le même ensemble de descentes et dont le premier élément est plus petit strictement. En répétant cette oppération, on obtient finalement une permutation plus petite pour l'ordre faible à gauche, de même ensemble de descentes et dont le premier élément est 1, que l'on note $\tau = [1, t_2, \ldots, t_m]$. Par hypothèse de récurrence, $[t_2, \ldots, t_m]$ peut être ramenée à une lsd permutation (pour l'alphabet $\{2, \ldots, m\}$) de même ensemble de descentes, grâce à des "transpositions décroissantes pour l'ordre faible" (on utilise ici l'hypothèse de diagramme connexe au rang $m-1$). Ces "transpositions décroissantes pour l'ordre faible" peuvent être effectuées de la même manière sur τ, puisque tout ce qui a été fait sur $[t_2, \ldots, t_m]$ ne fait pas intervenir la lettre 1.

(ii) $\{1, \ldots, i-1\} \subset D$, $i \notin D$ (si $\nexists i \in D$, $\sigma = [m, m-1, \ldots, 2, 1]$ et il n'y a rien à démontrer, puisque la classe de descentes de σ est réduite à un élément). σ est de la forme :

$$\sigma = [s_1 > s_2 > \ldots > s_i < s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_m]$$

Si $s_i > 1$, alors $s_i - 1 \in \{s_{i+2}, \ldots, s_m\}$. Ainsi, s_i et $s_i - 1$ peuvent être échangés, et l'on obtient alors une permutation plus petite pour l'ordre faible à gauche, avec le même ensemble de descentes et dont le i-ième élément est plus petit strictement. En répétant cette opération, on peut ainsi ramener σ à une permutation de la forme :

$$\sigma = [s_1 > s_2 > \ldots > 1 < s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_m]$$

grâce à des "transpositions décroissantes pour l'ordre faible", l'ensemble de descentes étant préservé. Procédons à nouveau par récurrence : supposons que σ est de la forme :

$$\sigma = [s_1 > s_2 > \ldots > s_k > r > r - 1 > \ldots > 1 < s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_m]$$

Alors $s_k - 1$ n'est pas dans $\{s_1, \ldots, s_{k-1}\}$, ni dans $\{1, \ldots, r\}$ sauf si $s_k = r + 1$. Ainsi, si $s_k \neq r + 1$, on obtient en échangeant s_k et $s_k - 1$, une permutation plus petite pour l'ordre faible à gauche, avec le même ensemble de descentes et dont le k-ième élément est plus petit strictement. En répétant cette opération, on ramène σ à une permutation de la forme $[s_1 > s_2 > \ldots > s_{k-1} > r + 1 > r > r - 1 > \ldots > 1 < t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_m]$. Par principe de récurrence, σ peut donc être ramené sous la forme :

$$\sigma = [i, i - 1, \ldots, 2, 1, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_m]$$

Par hypothèse de récurrence, on peut transformer $[s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_m]$ en une lsd permutation τ en l'alphabet $\{i + 1, \ldots, m\}$, grâce à des "transpositions décroissantes pour l'ordre faible", l'ensemble de descentes étant préservé. Dès lors, $[i, i - 1, \ldots, 2, 1] \star \tau$ a le même ensemble de descentes que σ et est une lsd permutation.

Ce qui termine de démontrer le premier point.

Le deuxième point, qui concerne l'existence d'un unique plus grand élément (pour l'ordre faible), en résulte puisque l'application :

$$\sigma = [s_1, \ldots, s_m] \longmapsto \tau = [m + 1 - s_1, \ldots, m + 1 - s_m]$$

renverse l'ordre faible et l'ordre lexicographique, et satisfait $desc(\tau) = \{1, \ldots, m - 1\} \backslash desc(\sigma)$.

$\square$

2.3.5 Ascension globale et ensembles de descentes

Une ascension d'une permutation $\sigma = [s_1, \ldots, s_m]$ est un entier $p \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ pour lequel $s_p < s_{p+1}$. L'ensemble des ascentions d'une permutation est notée $asc(\sigma)$. Une ascension $p \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ est dite globale si :

$$s_i < s_j \text{ pour tout } i \leqslant p, j \geqslant p + 1 \tag{120}$$

L'ensemble des ascensions globales d'une permutation est noté $gasc(\sigma)$. Bien entendu, $gasc(\sigma) \subset asc(\sigma)$. De même, une descente $p \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ est dite globale si :

$$s_i > s_j \text{ pour tout } i \leqslant p, j \geqslant p + 1 \tag{121}$$

L'ensemble des descentes globales d'une permutation est noté $gdesc(\sigma)$. Une permutation pour laquelle l'ensemble des descentes globales est égal à l'ensemble des descentes est dite fermée.

Théorème 65 *(i) $\sigma = [s_1, \ldots, s_m]$ est une lsd permutation si et seulement si $gasc(\sigma) = asc(\sigma)$.*

(ii) Une permutation est fermée si et seulement si c'est une lld permutation.

Démonstration : Étant donné la description faite des lsd permutations dans la section 2.3.2, voir notamment (115), il est immédiat que l'ensemble des ascensions globales est égal à l'ensemble des ascensions pour une lsd permutation. Inversement, on procède par récurrence sur la longueur de la permutation. La propriété est clair pour $m = 1, 2$. Supposons la propriété pour tout $k \leqslant m-1$. Soit $\sigma = [s_1, \ldots, s_m]$ une permutation telle que toutes ces ascensions sont globales. Soit i la première ascension, σ est donc de la forme :

$$\sigma = [s_1 > s_2 > \ldots > s_{i-1} > s_i < s_{i+1}, \ldots, s_m]$$

Puisque l'ascension est globale, l'élément 1 ne peut apparaître à droite de s_i dans σ. Ainsi $s_i = 1$. Si $i = 1$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Sinon, l'élément 2 ne peut apparaître à droite de $s_i = 1$ (puisque $s_{i-1} \geqslant 2$). Ainsi, σ est de la forme :

$$\sigma = [s_1 > s_2 > \ldots > 2 > 1 < s_{i+1}, \ldots, s_m]$$

En poursuivant ce raisonnement, on obtient que σ est de la forme :

$$\sigma = [i > i-1 > \ldots > 2 > 1 < s_{i+1}, \ldots, s_m]$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la permutation $[s_{i+1}, \ldots, s_m]$ pour obtenir le résultat. On conclut par principe de récurrence.

Le second point s'ensuit, en observant que si :

$$\sigma = [s_1, \ldots, s_m] \text{ et } \tau = [m+1-s_1, \ldots, m+1-s_m]$$

alors $asc(\sigma) = desc(\tau)$, $gasc(\sigma) = gdesc(\tau)$, et cette transformation renverse l'ordre lexicographique.

$\square$

Soit MPR_{lld} le sous-groupe de MPR engendré par les lld permuations. Si $u \star v$ est une coupe d'une permutation fermée, i.e. pour laquelle les ensembles de descentes et de descentes globales coïncident, il en est alors de même de u et de v, et de leurs standardisations. Ainsi $st(u)$ et $st(v)$ sont des lld permutations par le théorème précédent, ce qui montre que MPR_{lld} est une sous-cogèbre de (MPR, Δ). Elle est de plus graduée, puisqu'elle est engendrée par des éléments homogènes. Il en résulte une autre section de cogèbres de $\pi : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow QSym$ (différente de celle obtenue au théorème 62) :

Théorème 66 *Considérons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} MPR_{lld} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\pi''"'] & MPR \arrow[d, "\pi"] \\ QSym \arrow[r, "="] & QSym \end{tikzcd} \tag{122}$$

où π'' est définie comme la restriction de π à MPR_{lld}. Alors, π'' est un isomorphisme homogène de cogèbres, et son inverse est une section de la projection d'algèbres de Hopf $\pi : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow QSym$.

On peut démontrer ce résultat par une preuve analogue au théorème 62. D'une autre manière, le théorème précédent résulte directement du théorème 62, et du fait que $\sigma \mapsto \tau = [m+1-s_1, \ldots, m+1-s_m]$ est un automorphisme de la cogèbre (MPR, Δ). En effet, on a le résultat suivante :

Proposition 67 *Notons* $w_m = [m, m-1, \ldots, 1] \in S_m$*, et* $\sigma \circ \tau$ *la composition des permutations dans* S_m*. On définit une application linéaire* $\lambda : MPR \to MPR$ *(resp.* $\mu : MPR \to MPR$*) en posant sur chaque composante homogène* S_m *:* $\sigma \in S_m \overset{\lambda}{\mapsto} \sigma \circ w_m$ *(resp.* $\sigma \in S_m \overset{\mu}{\mapsto} w_m \circ \sigma$*). Alors,* λ *(resp.* μ*) est un automorphisme pour* m_{MPR} *et* Δ'_{MPR} *(resp.* m'_{MPR} *et* Δ_{MPR}*) et un anti-automorphisme pour* m'_{MPR} *et* Δ_{MPR} *(resp.* m_{MPR} *et* Δ'_{MPR}*). En particulier,* $\sigma \in S_m \mapsto w_m \circ \sigma \circ w_m$ *est un anti-automorphisme pour les deux structures d'algèbres de Hopf sur MPR.*

Remarque 68 *Si* $\sigma = [s_1, s_2, \ldots, s_m] \in S_m$*, alors* $\sigma \circ w_m = [s_m, \ldots, s_2, s_1]$ *et* $w_m \circ \sigma = [m + 1 - s_1, \ldots, m + 1 - s_m]$*.*

Démonstration : Rappelons que si on munit MPR du produit scalaire $\langle ., . \rangle'$ pour lequel les permutations forment une base orthonormale, (MPR, m, Δ) est duale de (MPR, m', Δ'). De plus, on sait que $\theta : (MPR, m, \Delta) \longrightarrow (MPR, m', \Delta'), \theta(\sigma) = \sigma^{-1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, w_m est involutive. On a donc $\theta \circ \lambda = \mu \circ \theta$. De plus, λ et μ sont autoadjointes. Pour λ par exemple : pour toutes permutations σ, τ de même longueur m :

$$\langle \lambda(\sigma), \tau \rangle' = \delta_{\lambda(\sigma),\tau} = \delta_{\sigma \circ w_m, \tau} = \delta_{\sigma, \tau \circ w_m} = \langle \sigma, \lambda(\tau) \rangle'$$

Il suffit de montrer que λ est un automorphisme pour m_{MPR} et un anti-automorphisme pour Δ_{MPR}. Le reste de la proposition s'en déduira alors comme suit : pour toutes permutations σ, σ', σ'' :

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta'(\sigma), \sigma' \otimes \sigma'' \rangle' &= \langle \Delta'(\sigma), (\lambda \otimes \lambda)(\sigma' \otimes \sigma'') \rangle' = \langle \sigma, m \circ (\lambda \otimes \lambda)(\sigma' \otimes \sigma'') \rangle' \\
&= \langle \sigma, \lambda \circ m(\sigma' \otimes \sigma'') \rangle' = \langle \Delta' \circ \lambda(\sigma), \sigma' \otimes \sigma'' \rangle' \\
\langle \lambda \circ m'(\sigma \otimes \sigma'), \sigma'' \rangle' &= \langle \sigma \otimes \sigma', \Delta \circ \lambda(\sigma'') \rangle' = \langle \sigma \otimes \sigma', (\lambda \otimes \lambda) \circ \tau \circ \Delta(\sigma'') \rangle' \\
&= \langle m' \circ \tau \circ (\lambda \otimes \lambda)(\sigma \otimes \sigma'), \sigma'' \rangle'
\end{aligned}$$

Ainsi, λ est un anti-automorphisme pour m' et un automorphisme pour Δ'. Pour μ, montrons par exemple que c'est un automorphisme pour m' et un anti-automorphisme pour Δ', on procédera de même pour m et Δ.

$$\begin{aligned}
m' \circ (\mu \otimes \mu) &= \theta \circ m \circ (\theta \otimes \theta) \circ (\mu \otimes \mu) = \theta \circ m \circ (\lambda \otimes \lambda) \circ (\theta \otimes \theta) \\
&= \theta \circ \lambda \circ m \circ (\theta \otimes \theta) = \mu \circ \theta \circ m \circ (\theta \otimes \theta) = \mu \circ m' \\
\Delta' \circ \mu &= (\theta \otimes \theta) \circ \Delta \circ \theta \circ \mu = (\theta \otimes \theta) \circ \Delta \circ \lambda \circ \theta \\
&= (\theta \otimes \theta) \circ (\lambda \otimes \lambda) \circ \tau \circ \Delta \circ \theta = (\mu \otimes \mu) \circ \tau \circ (\theta \otimes \theta) \circ \Delta \circ \theta = (\mu \otimes \mu) \circ \tau \circ \Delta'
\end{aligned}$$

On montre donc que λ est un automorphisme pour m et un anti-automorphisme pour Δ. Pour cela, on réécrit (64) de la façon suivante :

$$m(\sigma \otimes \sigma') = \sigma \times_{Sh} \overline{\sigma'}$$

où $\overline{\sigma'}$ est la composition obtenue à partir de σ' en remplaçant les lettres i par $i + lg(\sigma)$. Commençons par remarquer que λ est un automorphisme pour $\times_{Sh}$, puisque si $\sigma = [s_1, \ldots, s_m]$ et $\sigma' = [s'_1, \ldots, s'_n]$ sont des permutations de longueurs respectives m et n, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda(\sigma \times_{Sh} \sigma') &= \lambda \left(\sum_{\nu \text{ (m,n)-battage}} [s_{\nu^{-1}(1)}, \ldots, s_{\nu^{-1}(m)}, s'_{\nu^{-1}(1)}, \ldots, s'_{\nu^{-1}(n)}] \right) \\
&= \sum_{\nu \text{ (m,n)-battage}} [s'_{\nu^{-1}(n)}, \ldots, s'_{\nu^{-1}(1)}, s_{\nu^{-1}(m)}, \ldots, s_{\nu^{-1}(1)}] \\
&= [s'_n, \ldots, s'_1] \times_{Sh} [s_m, \ldots, s_1] = [s_m, \ldots, s_1] \times_{Sh} [s'_n, \ldots, s'_1] = \lambda(\sigma) \times_{Sh} \lambda(\sigma')
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda \circ m(\sigma \otimes \sigma') &= \lambda(\sigma \times_{Sh} \overline{\sigma'}) = \lambda(\sigma) \times_{Sh} \lambda(\overline{\sigma'}) \\ &= \lambda(\sigma) \times_{Sh} \overline{\lambda(\sigma')} = m \circ (\lambda \otimes \lambda)(\sigma \otimes \sigma') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \circ \Delta \circ \lambda(\sigma) &= \sum_{u \star v = \lambda(\sigma)} st(v) \otimes st(u) = \sum_{u \star v = \sigma} st(\lambda(u)) \otimes st(\lambda(v)) \\ &= \sum_{u \star v = \sigma} \lambda(st(u)) \otimes \lambda(st(v)) = (\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta(\sigma) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que λ est un automorphisme pour m et un anti-automorphisme pour Δ.

$\square$

2.3.6 La cogèbre des coupes incisives

Considérons encore le groupe abélien libre de base l'ensemble des compositions. On définit le coproduit suivant :

$$\Delta(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} [a_1, \ldots, a_i] \otimes [a_{i+1}, \ldots, a_m] + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{b_j + c_j = a_j \\ b_j, c_j > 0}} [a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j] \otimes [c_j, a_{j+1}, \ldots, a_m] \quad (123)$$

pour toute composition $\alpha = [a_1, \ldots, a_m]$. La première somme consiste en les coupes classiques sur *QSym*. Dans la deuxième somme, chaque $a_j > 1$ est scindé en deux de toutes les façons possibles : ces coupes sont dîtes incisives. On montre facilement que Δ est coassociatif, de counité ε qui vaut 1 sur le mot vide, et zéro sur toute autre composition de longueur > 0. On définit une graduation en posant pour toute composition α, $deg(\alpha) = wt(\alpha)$. Les composantes homogènes sont ici de rang fini (la composante homogène de degré n étant de rang $p(n)$, nombre de partitions de l'entier n). On a ainsi construit une cogèbre graduée connexe, qu'on note *CCI*.

Théorème 69 *Considérons le morphisme de groupes abélien défini par :*

$$(MPR, \Delta) \longrightarrow CCI, \sigma \mapsto comp(desc(\sigma)) \quad (124)$$

où $comp(desc(\sigma))$ est la composition associée à l'ensemble de descentes de la permutation σ. Alors, (124) *est un morphisme de cogèbres homogène.*

Remarque 70 *Ce résultat semble à première vue raisonnable, puisque le nombre de termes dans* (123) *est $m+1+\sum_{j=1}^{m} a_j - 1 = wt(\alpha)+1$, alors que le nombre de termes dans $\Delta(\sigma)$ est $lg(\sigma)+1$ (en notant que $wt(comp(desc(\sigma))) = lg(\sigma)$).*

Démonstration : Soit σ une permutation de longueur n. On considère son ensemble de descentes : $D = \{d_1, \ldots, d_{m-1}\} \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$. $\alpha = comp(desc(\sigma))$ est donc de longueur m et de poids n. Rappelons que :

$$\alpha = [a_1, \ldots, a_m], a_i = d_i - d_{i-1}, \text{avec } d_0 = 0, d_m = n$$

En particulier, (124) est bien homogène (de degré 0).

Considérons $\sigma = u \star v$ une coupe non-triviale de σ, avec $lg(u) = r$ et $lg(v) = n - r$, $0 < r < n$. Le terme correspondant dans $\Delta(\sigma)$ est $st(u) \otimes st(v)$. La question est maintenant de connaitre les compositions associées aux ensembles de descentes de $st(u)$ et $st(v)$, i.e. encore les compositions associées aux ensembles de descentes de u et v. Soit j l'unique indice tel que :

$$d_j \leqslant r < d_{j+1},\ j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

On a alors deux cas :

- Si $d_j = r$, l'ensemble de descentes de u est égal à $\{d_1, \ldots, d_{j-1}\} \subset \{1, 2, \ldots, r-1\}$, et la composition associée est $[a_1, \ldots, a_j]$. L'ensemble de descentes de v est égal à $\{d_{j+1} - r, \ldots, d_{m-1} - r\} \subset \{1, 2, \ldots, n-r-1\}$, la composition associée étant $[a_{j+1}, \ldots, a_m]$. Dans ce cas, on obtient une coupe classique, et un terme de la première somme dans (123).
- Si $d_j < r$, soient $b_{j+1} = r - d_j$ et $c_{j+1} = d_{j+1} - r$. Notons que $b_{j+1} + c_{j+1} = a_{j+1}$. Dans ce cas, l'ensemble de descentes de u est égal à $\{d_1, \ldots, d_j\} \subset \{1, 2, \ldots, r-1\}$, et celui de v est égal à $\{d_{j+1} - r, \ldots, d_{m-1} - r\} \subset \{1, 2, \ldots, n-r-1\}$. Les compositions associées sont respectivement $[a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}]$ et $[c_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_m]$. Dans ce cas, on obtient une coupe incisive, et un terme de la deuxième somme dans (123).

Tous les termes de (123) sont ainsi obtenus, ce qui démontre le résultat.

□

Considérons le dual gradué CCI^* du groupe abélien CCI, et notons (R'_α) la base duale, indéxée par l'ensemble des compositions. La structure de cogèbre sur CCI induit une structure d'algèbre sur CCI^*, donnée par :

$$R'_{[a_1,\ldots,a_m]} R'_{[b_1,\ldots,b_n]} = R'_{[a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n]} + R'_{[a_1,\ldots,a_m+b_1,\ldots,b_n]} \tag{125}$$

Or cette formule nous est familière, puisque c'est exactement la multiplication des fonctions de Schur (voir (48)). Ainsi, CCI^* est isomorphe comme algèbre à $NSym$. Et par passage au dual, CCI est isomorphe à $QSym$ comme cogèbre, l'isomorphisme étant donné par $\alpha \mapsto F_\alpha$ (puisque les R_α et les F_α forment des bases duales).

On retrouve une partie d'un résultat déjà obtenu, à savoir l'existence d'une projection π : $(MPR, m, \Delta) \longrightarrow QSym$, morphisme d'algèbres de Hopf homogène et surjectif, donné par :

$$\sigma \longmapsto F_{comp(desc(\sigma))}$$

Seulement, cette projection qu'on avait obtenu par dualité, apparait ici de manière plus naturelle.

3 Fonctions non-commutatives symétriques associées à un code, factorisation de Lazard, et vecteurs de Witt

3.1 L'anneau des vecteurs de Witt

Soit $X = \{X_1, X_2, \ldots\}$ un ensemble d'indéterminées qui commutent. On définit la suite de polynômes (w_n) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} w_1(X) & = & X_1 \\ w_2(X) & = & X_1^2 + 2X_2 \\ & \cdots & \\ w_n(X) & = & \displaystyle\sum_{d|n} d X_d^{n/d} \\ & \cdots & \end{array} \tag{126}$$

Considérons Φ un polynôme à deux variables à coefficients entiers. On définit les polynômes $\phi_i(X_1,\dots,X_i;Y_1,\dots,Y_i)$ par la formule de récurrence suivante :

$$\Phi(w_n(X_1,\dots,X_n),w_n(Y_1,\dots,Y_n)) = w_n(\phi_1(X_1;Y_1),\dots,\phi_n(X_1,\dots,X_n;Y_1,\dots,Y_n)) \quad (127)$$

ce qu'on peut réécrire de façon synthétique : $\Phi(w_n(X),w_n(Y)) = w_n(\phi(X;Y))$. Étant donné (126), il est clair qu'il existe bien des polynômes $\phi_i(X_1,\dots,X_i;Y_1,\dots,Y_i)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui satisfont (127) (puisque X_n peut s'écrire comme un polynôme en les $w_1(X),\dots,w_n(X)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$).

Proposition 71 *Les polynômes ϕ_n définis par* (127) *sont à coefficients entiers.*

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est trivial. Supposons $n \geqslant 2$, et que pour tout $i<n$, ϕ_i est à coefficients entiers. Soit p un nombre premier quelconque, et notons $n=p^k m$ avec $pgcd(p,m)=1$. Nous allons montrer que $\phi_n(X;Y)\in\mathbb{Z}_{(p)}[X;Y]$. Si $k=0$, cela résulte directement de $\Phi(w_n(X),w_n(Y)) = w_n(\phi(X;Y))$, puisque pour écrire X_n en fonction des $w_1(X),\dots,w_n(X)$, on a besoin de diviser uniquement par n, et les seuls dénominateurs qui peuvent apparaître dans les coefficients sont premiers avec p. Supposons donc $k\geqslant 1$. On a :

$$w_n(X) = w_{n/p}(X^p) + p^k(mX_n + \text{termes en } X_1,\dots,X_{n-1}) \quad (128)$$

où pour X^p, il faut comprendre $(X_1^p, X_2^p,\dots)$. En effet :

$$\begin{aligned} w_n(X) &= \sum_{d\mid n} dX_d^{n/d} = \sum_{d\mid p^{-1}n} dX_d^{n/d} + \sum_{d\mid n, d\nmid p^{-1}n} dX_d^{n/d} \\ &= w_{n/p}(X^p) + \sum_{d\mid n, d\nmid p^{-1}n} dX_d^{n/d} \end{aligned}$$

Mais si $d\mid n, d\nmid p^{-1}n$, on doit avoir $d=p^k d'$ avec $d'\mid m$. Ce qui prouve (128).

Puisque $\Phi(w_n(X),w_n(Y)) = w_n(\phi(X;Y))$, on obtient avec (128) :

$$n\phi_n(X;Y) + p^k(\text{termes en } \phi_1(X;Y),\dots,\phi_{n-1}(X;Y)) + w_{n/p}(\phi^p(X;Y)) = \Phi(w_n(X),w_n(Y)) \quad (129)$$

Par hypothèse de récurrence, les ϕ_r sont à coefficients entiers pour tout $r<n$. On a donc $\phi_r^p(X;Y)\equiv\phi_r(X^p;Y^p)\ mod(p)$ pour tout $r<n$. Mais alors : $r\,(\phi_r^p(X;Y))^{n/r} \equiv r\,(\phi_r(X^p;Y^p))^{n/r}$ $mod(p^k)$ pour tout $r\mid n, r<n$. Ainsi :

$$w_{n/p}(\phi^p(X;Y)) = w_{n/p}(\phi(X^p;Y^p))\ mod(p^k)$$

D'autre part, en substituant (128) dans $\Phi(w_n(X),w_n(Y))$, on obtient (puisque Φ est à coefficients entiers) :

$$\Phi(w_n(X),w_n(Y)) = \Phi(w_{n/p}(X^p),w_{n/p}(Y^p))\ mod(p^k) = w_{n/p}(\phi(X^p;Y^p))\ mod(p^k) \quad (130)$$

En combinant (129) et (130), on obtient que $n\phi_n(X;Y)\equiv 0\ mod(p^k)$, ce qui prouve que $\phi_n(X;Y)\in\mathbb{Z}_{(p)}[X;Y]$. Comme ceci est vrai pour tout nombre premier p, on a donc montré que $\phi_n(X;Y)\in\mathbb{Z}[X;Y]$, ce qui termine la démonstration par principe de récurrence.

□

En prenant pour Φ les polynômes $\Phi(Z_1, Z_2) = Z_1 + Z_2$ ou $Z_1 Z_2$ ou $-Z_1$, on définit ainsi des suites de polynômes $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots)$, $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$, $\iota = (\iota_1, \iota_2, \ldots)$, qui vérifient :

$$w_n(\Sigma) = w_n(X) + w_n(Y), w_n(\Pi) = w_n(X)w_n(Y), w_n(\iota) = -w_n(X) \tag{131}$$

Soit A un anneau commutatif, et soit $W(A)$ l'ensemble des suites $(a_1, a_2, \ldots), a_i \in A$. On définit une addition et une multiplication sur $W(A)$ en posant :

$$\begin{array}{rcl} (a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) & = & (\Sigma_1(a_1; b_1), \Sigma_2(a_1, a_2; b_1, b_2), \ldots) \\ (a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_1, b_2, \ldots) & = & (\Pi_1(a_1; b_1), \Pi_2(a_1, a_2; b_1, b_2), \ldots) \end{array} \tag{132}$$

Théorème 72 *L'ensemble $W(A)$ muni de l'addition et de la multiplication définies par* (132) *est un anneau commutatif, avec $0_A = (0, 0, \ldots)$, $1_A = (1, 0, 0, \ldots)$, et :*

$$(a_1, a_2, \ldots) + (\iota_1(a_1), \iota_2(a_1, a_2), \ldots) = (0, 0, 0, \ldots) \tag{133}$$

De plus, si $\phi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors :

$$W(\phi)(a_1, a_2, \ldots) = (\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots) \tag{134}$$

est un homomorphisme d'anneaux $W(A) \to W(B)$. Enfin, $w_n : W(A) \to A$ est un homomorphisme d'anneaux pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration : Supposons pour commencer que A est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors, l'application $w : W(A) \to A^{\mathbb{N}}, \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \mapsto (w_1(\mathbf{a}), w_2(\mathbf{a}), \ldots)$ est une bijection, telle que pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W(A)$:

$$\begin{array}{rcl} w(\mathbf{a} + \mathbf{b}) & = & (w_1(\Sigma_1(a_1; b_1)), w_2(\Sigma_2(a_1, a_2; b_1, b_2)), \ldots) \\ & = & (w_1(a_1) + w_1(b_1), w_2(a_1, a_2) + w_2(b_1, b_2), \ldots) \\ w(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) & = & (w_1(\Pi_1(a_1; b_1)), w_2(\Pi_2(a_1, a_2; b_1, b_2)), \ldots) \\ & = & (w_1(a_1)w_1(b_1), w_2(a_1, a_2)w_2(b_1, b_2), \ldots) \end{array}$$

Ainsi, w préserve l'addition et la multiplication entre $W(A)$ et $A^{\mathbb{N}}$, où l'addition et la multiplication sont prises composantes par composantes. Mais, $A^{\mathbb{N}}$ muni de cette addition et de ce produit est un anneau commutatif. Donc $W(A)$ est un anneau commutatif dans ce cas. De plus, $w(0, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$, $w(1, 0, 0, \ldots) = (1, 1, 1, \ldots)$ et :

$$w(\iota_1(\mathbf{a}), \iota_2(\mathbf{a}), \ldots) = (-w_1(\mathbf{a}), -w_2(\mathbf{a}), -w_3(\mathbf{a}), \ldots)$$

d'où $0_A = (0, 0, 0, \ldots)$, $1_A = (1, 0, 0, \ldots)$, et (133).

Considérons à présent le cas d'un anneau A de caractéristique nulle, et soit $\phi : A \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Alors $W(\phi) : W(A) \to W(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ est injective. De plus, puisque l'addition et la multiplication de vecteurs de Witt sont définies par des polynômes à coefficients entiers, il est clair que $W(\phi)$ préserve l'addition et la multiplication. Comme $W(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ est un anneau commutatif, comme de plus $W(\phi)$ est injective, préserve l'addition, le produit, l'opposé, et envoie $(0, 0, 0, \ldots)$ sur $(0, 0, 0, \ldots)$, $(1, 0, 0, \ldots)$ sur $(1, 0, 0, \ldots)$, $W(A)$ est bien un anneau.

Enfin, si A est un anneau commutatif quelconque, il existe un anneau commutatif de caractéristique zéro $\tilde{A}$ et un morphisme d'anneaux surjectif $\phi : \tilde{A} \to A$. Par ce qu'on a fait, $W(\tilde{A})$ est un anneau commutatif, $W(\phi)$ préserve l'addition et la multiplication. Donc $W(A)$ est aussi un anneau commutatif. Quant aux deux dernières assertions du théorème, elles découlent directement des définitions de l'addition et de la multiplication.

$\square$

Remarque 73 *On a ainsi défini un foncteur $W : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ étant la catégorie des anneaux, avec les propriétés :*

(i) comme ensemble, $W(A) = \{(a_1, a_2, \ldots)|a_i \in A\}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$,

(ii) pour tout $A \xrightarrow{\phi} B$, $W(\phi) : W(A) \to W(B)$, $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto (\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots)$,

(iii) $w_n : W(A) \to A$, $\mathbf{a} \mapsto w_n(\mathbf{a})$ est un homomorphisme d'anneaux pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Il suit de la preuve qu'on vient de faire que W est l'unique foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaisant ces propriétés. Il est de plus représentable, i.e. il existe un anneau R tel que $W(A) = Hom_{\mathcal{A}}(R, A)$ fonctoriellement. En effet, $R = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots]$ convient. On dispose alors d'un coproduit coassociatif et cocommutatif sur R :

$$\begin{array}{rcc} \Delta : \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots] & \to & \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots] \otimes \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots] \\ X_i & \mapsto & \Sigma_i(X_1 \otimes 1, \ldots, X_i \otimes 1; 1 \otimes X_1, \ldots, 1 \otimes X_i) \end{array} \tag{135}$$

qui munit R d'une structure d'algèbre de Hopf. La counité ε est l'unique morphisme d'algèbres $R \to \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon(X_i) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$. L'antipode S est uniquement déterminé par $S(X_i) = \iota_i(X_1, \ldots, X_i)$, $i \geqslant 1$.

L'addition et la multiplication dans l'anneau $W(A)$ peuvent être mieux comprises en termes de fonctions symétriques : Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble infini d'indéterminées qui commutent, on définit les fonctions symétriques $q_n(x)$ par :

$$\prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - q_n(x)t^n} = s(t) = \sum_{n \geqslant 0} S_n t^n \tag{136}$$

où S_n désigne la fonction symétrique homogène complète d'ordre n. Rappelons qu'elles ont été défini par :

$$s(t) = \prod_{n \geqslant 1} (1 - x_n t)^{-1} \tag{137}$$

Les premiers q_n sont donnés par :

$$\begin{aligned} q_1 &= S_1 \\ q_1^2 + q_2 &= S_2 \\ q_1^3 + q_1 q_2 + q_3 &= S_3 \\ q_1^4 + q_1^2 q_2 + q_1 q_3 + q_2^2 + q_4 &= S_4 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Puisque les S_n ($n \geqslant 1$) engendrent librement la $\mathbb{Z}$-algèbre $Sym(x) = Sym$, il en est de même des q_n. De plus, on notera que q_n est homogène de degré n. Exprimons les fonctions symétriques sommes de puissances P_n en fonction des q_n :

$$p(t) = \sum_{n \geqslant 1} P_n t^{n-1} = \frac{d}{dt} log\ s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i q_i t^{i-1}}{1 - q_i t^i}$$

soit en multipliant par t :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} P_n t^n &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iq_it^i}{1-q_it^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i(q_it^i)^j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n} dq_d^{n/d}\right)t^n\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$:

$$P_n = \sum_{d|n} dq_d^{n/d} \tag{138}$$

Considérons à présent $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ un nouvel ensemble infini d'indéterminées qui commutent, avec $X \cap Y = \varnothing$. Prenons $A = \mathbb{Z}[[X \cup Y]]$, et étudions la somme et le produit des vecteurs de Witt $(q_n(x))$ et $(q_n(y))$:

$$\begin{aligned} w((q_n(x)) + (q_n(y))) &= (w_1((q_1(x))) + w_1((q_1(y))), w_2((q_1(x))) + w_2((q_1(y))), \ldots) \\ &= (P_1(x) + P_1(y), P_2(x) + P_2(y), \ldots) \\ w((q_n(x)) \cdot (q_n(y))) &= (w_1((q_1(x))) \cdot w_1((q_1(y))), w_2((q_1(x))) \cdot w_2((q_1(y))), \ldots) \\ &= (P_1(x) \cdot P_1(y), P_2(x) \cdot P_2(y), \ldots)\end{aligned}$$

Or, les fonctions symétriques sommes de puissances satisfont :

$$P_i(x,y) = P_i(x) + P_i(y), P_i(xy) = P_i(x)P_i(y)$$

D'où finalement :

$$w((q_n(x)) + (q_n(y))) = (P_1(x,y), P_2(x,y), \ldots) = w((q_n(x,y)))$$
$$w((q_n(x)) \cdot (q_n(y))) = (P_1(xy), P_2(xy), \ldots) = w((q_n(xy)))$$

Ainsi, la somme et le produit des vecteurs de Witt $(q_n(x))$ et $(q_n(y))$ sont respectivement $(q_n(x,y))$ et $(q_n(xy))$, éléments de $Sym(x,y)$. Puisque les q_n engendrent librement Sym, $q_n(x,y)$ et $q_n(xy)$ sont des polynômes en les $q_i(x)$, $q_i(y)$ à coefficients entiers. On retrouve en particulier que les formules donnant la somme et le produit de vecteurs de Witt sont à coefficients entiers (ce qu'on avait obtenu grâce à la proposition 71).

Considérons toujours un anneau commutatif A, et soit $\Lambda(A)$ l'ensemble des séries formelles $f(t) \in A[[t]]$ à une indéterminée t de la forme :

$$f(t) = 1 + a_1t + a_2t^2 + \ldots,\ a_i \in A \tag{139}$$

La multiplication dans l'anneau des séries formelles $A[[t]]$ définit une addition dans $\Lambda(A)$, faisant de $\Lambda(A)$ un groupe abélien d'élément zéro l'élément $1 \in \Lambda(A)$. On va introduire dans la suite une multiplication dans $\Lambda(A)$ qui le munira alors d'une structure d'anneau. Pour cela, il va nous falloir définir une suite de polynômes $(\pi_n)_n$.

Soient $x_1, x_2, \ldots$ et $y_1, y_2, \ldots$ des indéterminées qui commutent. On considère l'expression :

$$\prod_{i,j}(1 - x_iy_jt) = 1 + \pi_1t + \pi_2t^2 + \ldots \tag{140}$$

Notons $\tilde{\Sigma}_i = (-1)^i \Sigma_i$ où Σ_i désigne la fonction symétrique élémentaire d'ordre i. Par le théorème 8, les fonctions symétriques π_i peuvent s'écrire comme des polynômes $\pi_i(\tilde{\Sigma}_1(x), \ldots, \tilde{\Sigma}_i(x); \tilde{\Sigma}_1(y), \ldots, \tilde{\Sigma}_i(y))$ en les $\tilde{\Sigma}_1(x), \ldots, \tilde{\Sigma}_i(x); \tilde{\Sigma}_1(y), \ldots, \tilde{\Sigma}_i(y)$. Ainsi :

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j t) = 1 + \pi_1(\tilde{\Sigma}_1(x); \tilde{\Sigma}_1(y))t + \pi_2(\tilde{\Sigma}_1(x), \tilde{\Sigma}_2(x); \tilde{\Sigma}_1(y), \tilde{\Sigma}_2(y))t^2 + \ldots$$

On définit alors une multiplication sur $\Lambda(A)$ en posant :

$$(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) \cdot (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) = 1 + \pi_1(a; b)t + \pi_2(a; b)t^2 + \ldots \tag{141}$$

Pour montrer que $\Lambda(A)$ muni de l'addition et de la multiplication mises en place auparavant est bien un anneau commutatif, on définit les fonctions $s_n : \Lambda(A) \to A$ comme suit :

$$s_1 t + s_2 t^2 + \ldots = -\frac{t f'(t)}{f(t)} = -t \frac{d}{dt} log(f(t)). \tag{142}$$

Lemme 74 *Pour tout $f(t), g(t) \in \Lambda(A)$, on a :*

$$\begin{array}{rcl} s_n(f(t)g(t)) & = & s_n(f(t)) + s_n(g(t)) \\ s_n(f(t) \cdot g(t)) & = & s_n(f(t)) s_n(g(t)) \end{array} \tag{143}$$

Démonstration : La première égalité du lemme s'obtient immédiatement grâce à (142). Pour la seconde égalité, on écrit formellement :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}(1 - x_i t) = 1 + \tilde{\Sigma}_1(x)t + \tilde{\Sigma}_2(x)t^2 + \ldots \\ g(t) & = & \displaystyle\prod_{j=1}^{\infty}(1 - y_j t) = 1 + \tilde{\Sigma}_1(y)t + \tilde{\Sigma}_2(y)t^2 + \ldots \end{array}$$

Par la formule (142), on obtient l'expression suivante de $s_n(f(t))$ et $s_n(g(t))$:

$$s_n(f(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n, \; s_n(g(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^n$$

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} f(t) \cdot g(t) & = & (1 + \tilde{\Sigma}_1(x)t + \tilde{\Sigma}_2(x)t^2 + \ldots) \cdot (1 + \tilde{\Sigma}_1(y)t + \tilde{\Sigma}_2(y)t^2 + \ldots) \\ & = & 1 + \pi_1(\tilde{\Sigma}_1(x); \tilde{\Sigma}_1(y))t + \pi_2(\tilde{\Sigma}_1(x), \tilde{\Sigma}_2(x); \tilde{\Sigma}_1(y), \tilde{\Sigma}_2(y))t^2 + \ldots \\ & = & \displaystyle\prod_{i,j}(1 - x_i y_j t) \end{array}$$

et $s_n(f(t) \cdot g(t))$ est le coefficient de t^n dans :

$$-t \frac{d}{dt} log\left(\prod_{i,j}(1 - x_i y_j t)\right) = \sum_{i,j} \frac{x_i y_j t}{1 - x_i y_j t} = \sum_{i,j}(x_i y_j t + (x_i y_j t)^2 + \ldots)$$

Ce qui prouve la seconde égalité (voir également la remarque 11).

□

Proposition 75 $\Lambda(A)$ *muni de l'addition et la multiplication définie par* (141) *est un anneau commutatif, et les applications* $s_n : \Lambda(A) \to A$ *sont des homomorphismes d'anneaux. De plus, si* $\phi : A \to B$ *est un morphisme d'anneaux,* $\Lambda(\phi) : \Lambda(A) \to \Lambda(B)$, $1+a_1t+a_2t^2+\ldots \mapsto 1+\phi(a_1)t+\phi(a_2)t^2+\ldots$ *est un homomorphisme d'anneaux. On définit ainsi un foncteur* $\Lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Démonstration : Puisque l'addition et la multiplication dans $\Lambda(A)$ sont définies grâce à des polynômes à coefficients entiers, il suit immédiatement que $\Lambda(\phi)$ est compatible avec l'addition et la multiplication. Le reste de la démonstration est analogue à la preuve du théorème 72, le rôle des polynômes w_n dans cette démonstration étant ici joué par les s_n.

□

Définition 76 *(Application exponentielle) Pour tout anneau commutatif A, on définit l'application* $\overline{E}_A : W(A) \to \Lambda(A)$ *par la formule :*

$$\overline{E}_A((a_1, a_2, \ldots)) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - a_i t^i) \tag{144}$$

Proposition 77 *L'application* $\overline{E}_A$ *est bijective pour tout anneau A. On a de plus* $\overline{E}_A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \overline{E}_A(\mathbf{a})\overline{E}_A(\mathbf{b})$ *et* $\overline{E}_A(\mathbf{ab}) = \overline{E}_A(\mathbf{a}) \cdot \overline{E}_A(\mathbf{b})$. $\overline{E}_A$ *est donc un isomorphisme d'anneaux. Et si* $\phi : A \to B$ *est un morphisme d'anneaux, alors* $\Lambda(\phi)\overline{E}_A = \overline{E}_B W(\phi)$. *Ainsi,* $\overline{E}_A$ *définit un isomorphisme de foncteurs* $\overline{E} : W \to \Lambda$. *Enfin,* $s_n\overline{E}_A = w_n$.

Démonstration : La bijectivité de $\overline{E}_A$ et $\Lambda(\phi)\overline{E}_A = \overline{E}_B W(\phi)$ découlent directement des définitions. Reste à montrer que $\overline{E}_A$ est un morphisme d'anneaux. Il suffit pour cela de montrer que :

$$\begin{aligned} s_n(\overline{E}_A(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})) &= s_n(\overline{E}_A(\mathbf{a}) \cdot \overline{E}_A(\mathbf{b})) \\ s_n(\overline{E}_A(\mathbf{a}+\mathbf{b})) &= s_n(\overline{E}_A(\mathbf{a})) + s_n(\overline{E}_A(\mathbf{b})) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et cela découlera directement de $s_n\overline{E}_A = w_n$, puisque s_n et w_n sont tous les deux des morphismes d'anneaux. Il reste donc à montrer $s_n\overline{E}_A(\mathbf{a}) = w_n(\mathbf{a})$ pour tout anneau A et tout $\mathbf{a} \in W(A)$:

$$\begin{aligned} -t\frac{d}{dt}log(\overline{E}_A(a)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ia_it^i}{1-a_it^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i(a_it^i)^j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i|n} ia_i^{n/i}\right)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(a)t^n \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

On peut résumer ces différentes propriétés par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} W(A) \arrow[r, "\overline{E}_A"] \arrow[d, "w"'] & \Lambda(A) \arrow[d, "\partial"] \\ A^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\varsigma"] & A[[t]] \end{tikzcd} \tag{145}$$

où A est un anneau commutatif quelconque, et où :

$$\partial = -t\frac{d}{dt}log$$

$$\varsigma(c_1, c_2, \dots) = \sum_{n \geqslant 1} c_n t^n$$

$$w(\mathbf{a}) = (w_1(\mathbf{a}), w_2(\mathbf{a}), \dots)$$

$$\overline{E}_A((a_1, a_2, \dots)) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n t^n)$$

3.2 Fonctions non-commutatives symétriques associées à un code

Rappel Nous avons vu que les opérations dans l'anneau $W(A)$ des vecteurs de Witt peuvent être mieux comprises en termes de fonctions symétriques. Pour cela, nous avions défini les fonctions symétriques q_n comme suit :

$$\prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - q_n t^n} = s(t) = \sum_{n \geqslant 0} S_n t^n$$

où S_n désigne la fonction symétrique homogène complète d'ordre n.

Soit à présent A un ensemble d'indéterminées, appelé aussi alphabet. On note $S_n(A)$ la fonction symétrique homogène complète non-commutative d'ordre n en l'alphabet A. On définit alors les fonctions symétriques de Witt non-commutatives $Q_n(A)$ par l'identité :

$$\prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - Q_n(A) t^n} = s(t, A) = \sum_{n \geqslant 0} S_n(A) t^n \tag{146}$$

On peut montrer que pour $n \geqslant 2$, $(-Q_n)$ est une somme de fonctions de Schur R_α avec des coefficients positifs et sans multiplicité[13].

On notera dans la suite A^* l'ensemble des mots en l'alphabet A, et si $S \subset A^*$, on notera $\underline{S} = \sum_{w \in S} w$ sa série caractéristique.

Définition 78 *Soit A un alphabet et $C \subset A^*$. On dira que C est un code si C est un ensemble minimal de générateurs d'un sous-monoïde libre C^* de A^*.*

Supposons que l'on ait une décomposition d'un code C :

$$C = \bigsqcup_{n \geqslant 1} C_n$$

où les C_n peuvent être vides. On pourra par exemple prendre $C_n = C \cap A^n$. Les éléments de C_n seront pris de degré n. Notons toujours $NSym = \mathbb{Z}\langle \Sigma_1, \Sigma_2, \dots \rangle$ l'algèbre des fonctions non-commutatives symétriques. On peut en définir une spécialisation $NSym[C]$ en posant :

$$\Sigma_n[C] = (-1)^n \underline{C_n} \tag{147}$$

[13]voir [13] pour une démonstration.

Avec ce choix, et par (36), les fonctions symétriques homogènes complètes sont données par :

$$S_n[C] = \sum_{w\in(C^*)_n} w, \tag{148}$$

somme de tous les éléments de degrés n dans C^*. On appelle alors C-fonctions symétriques de Witt la valeur $Q_i[C]$ de Q_i pour cette spécialisation.

Exemple

1. Considérons le code $C = \{b, ab\}$, code de préfixes de Fibonacci. On donne les premiers $Q_i[C]$:

$$\begin{aligned}
Q_1[C] &= b \\
Q_2[C] &= ab \\
Q_3[C] &= ab^2 \\
Q_4[C] &= ab^3 \\
Q_5[C] &= ab^2ab + ab_4 \\
Q_6[C] &= ab^3ab + ab^5 \\
Q_7[C] &= ab^6 + ab^2(ab)^2 + ab^4ab + ab^3ab^2
\end{aligned}$$

2. Considérons le code $C = \{ba^*\}$, code de préfixes infinis. Là encore, on donne les premiers $Q_i[C]$:

$$\begin{aligned}
Q_1[C] &= b \\
Q_2[C] &= ba \\
Q_3[C] &= ba^2 + bab \\
Q_4[C] &= bab^2 + ba^3 + ba^2b \\
Q_5[C] &= bab^2a + bab^3 + ba^2b^2 + ba^3b + ba^4 + ba^2ba \\
Q_6[C] &= ba^4b + ba^3b^2 + ba^2b^2a + bab^3a + bab^4 + ba^3ba + ba^5 + ba^2b^2
\end{aligned}$$

Dans ces exemples, on remarque que chaque Q_i est sans multiplicité, et qu'il correspond à la série caractéristique d'un code. On va montrer dans la section suivante que c'est toujours le cas, et on donnera une caractérisation de ce code en terme de factorisations de Lazard.

3.3 Fonctions symétriques de Witt et factorisation

3.3.1 Processus d'élimination de Lazard

Définition 79 *On appelle factorisation d'un monoïde $\mathbb{M}$ toute famille ordonnée de monoïdes $\mathbb{F} = (\mathbb{M}_i)_{i\in I}$ telle que tout élément $m \in \mathbb{M}$ admet une unique décomposition :*

$$m = m_{i_1} \dots m_{i_k} \tag{149}$$

où $i_1 > \dots > i_k$ et $m_{i_1} \in \mathbb{M}_{i_1}, \dots, m_{i_k} \in \mathbb{M}_{i_k}$.

Dans le cas du monoïde libre $\mathbb{M} = A^*$, cette propriété peut s'énoncer en termes de séries génératrices :

$$\sum_{w\in A^*} w = \overleftarrow{\prod_i} \sum_{w\in\mathbb{M}_i} w \tag{150}$$

Un sous-monoïde $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ peut être caractérisé par l'ensemble $\mathbb{M}' \setminus \mathbb{M}'^2$ de ses générateurs. Une factorisation d'un monoïde sera ainsi donnée par la suite $(C_i)_{i\in I}$, où C_i est l'ensemble des générateurs du monoïde $\mathbb{M}_i$. Pour le monoïde libre $\mathbb{M} = A^*$, on peut alors réécrire (150) :

$$\frac{1}{1-\underline{A}} = \overleftarrow{\prod_i} \frac{1}{1-\underline{C_i}} \tag{151}$$

On donne à présent un exemple de factorisation pour le monoïde A^*, la *bisection de Lazard* : Considérons un sous-alphabet $B \subset A$, on a :

$$A^* = B^*((A \setminus B)B^*)^* \tag{152}$$

La paire $(B, (A \setminus B)B^*)$ est une factorisation du monoïde A^* (notons que si $A = B$, la factorisation est alors réduite à (A)). On peut alors obtenir à partir de (152) une trisection (i.e. une factorisation en trois sous-monoïdes) en itérant ce procédé sur le facteur de gauche ou de droite : si par exemple $C \subset A$ est un autre sous-alphabet, en itérant ce procédé sur le facteur de gauche, on obtient :

$$A^* = C^*((B \setminus C)C^*)^*((A \setminus B)B^*)^*$$

Si $C \subset (A \setminus B)B^*$ est un sous alphabet, en itérant cette fois ce procédé sur le facteur de droite, on obtient :

$$A^* = B^*C^*(((A \setminus B\ B^*) \setminus C)C^*)^*$$

Les factorisations qu'on peut ainsi obtenir en appliquant les bisections de Lazard uniquement sur les facteurs de droite sont appelées les *compositions de Lazard à droite*.

Soit à présent A un alphabet (fini ou non) et $wt : A \to \mathbb{N}^*$ une fonction de poids. Cette fonction s'étend de façon unique en un morphisme $wt : A^* \to (\mathbb{N}^*, +)$. On peut alors lui associer une factorisation $\mathbb{F}(A, wt)$ de la manière suivante : on définit les suites de codes $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ et $(C_i)_{i\geqslant 1}$ par les relations de récurrences :

1. $Z_1 = A$
2. pour tout entier $i > 0$, $C_i = Z_i \cap \{w \in A^* | wt(w) = i\}$
3. pour tout entier $i > 0$, $Z_{i+1} = (Z_i \setminus C_i)C_i^*$

La suite $\mathbb{F}(A, wt) = (C_i)_{i\in I}$, obtenue en omettant les termes de la suite $(C_i)_{i\geqslant 1}$ qui sont égaux à l'ensemble vide, est une composition de Lazard à droite. Pour $wt = lg$ comme fonction de poids, on définit ainsi une factorisation notée $\mathbb{F}(C^*)$ de C^*, appelée *factorisation à droite selon la longueur*. On notera que le code est homogène si et seulement si $\mathbb{F}(C^*) = (C)$.

3.3.2 Calcul des C-fonctions symétriques de Witt

L'égalité entre séries formelles (146) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{1}{1-\underline{C}} = \frac{1}{1-Q_1}\frac{1}{1-Q_2}\frac{1}{1-Q_3}\cdots \tag{153}$$

On démontre dans cette section que cette factorisation de séries est $\mathbb{F}(C^*)$, la factorisation à droite selon la longueur de C^*.

On commence par présenter un algorithme récursif pour calculer les fonctions symétriques Q_n[14]. Posons pour cela :

[14] voir également [13].

$$\tilde{S}_\alpha = (-1)^{lg(\alpha)} S_\alpha \tag{154}$$

pour toute composition α. Les Q_n peuvent être calculés comme suit :

1. $F_1 = -\sum_i \tilde{S}_i$,
2. $F_{n+1} = F_n + Q_n(1 - F_n)$,
3. Q_n est le terme de degré n dans F_n multiplié par -1.

Posons $Z_n = 1 - (1 - F_n)^{-1}$, on a :

$$F_{n+1} = 1 - (1 - Z_{n+1})^{-1}$$

et :

$$\begin{aligned} F_n + Q_n(1 - F_n) &= 1 - (1 - Z_n)^{-1} + Q_n(1 - Z_n)^{-1} \\ &= 1 - (1 - Q_n)(1 - Z_n)^{-1} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= 1 - (1 - Z_n)(1 - Q_n)^{-1} \\ &= (Z_n - Q_n)(1 - Q_n)^{-1} \end{aligned}$$

Soit $Z_i[C]$ et $F_i[C]$ les valeurs respectives de Z_i et F_i pour la spécialisation $S_n = S_n[C]$. La définition des fonctions symétriques non commutatives complètes homogènes donne alors :

$$s(1, C) = \sum S_n[C] = \frac{1}{1 - \underline{C}} \tag{155}$$

On obtient :

$$Z_1[C] = 1 - (s(1, C))^{-1} = \underline{C} \tag{156}$$

$$Q_1[C] = S_1[C] = \underline{C_1} \tag{157}$$

et :

$$Z_1[C] - Q_1[C] = \underline{C} - \underline{C_1} \tag{158}$$

Ainsi, $Z_1[C]$ et $Q_1[C]$ sont les séries caractéristiques des codes $Z_1 = C$ et $Q_1 = C_1$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $n > 0$, les séries $Z_{n+1}[C]$ et $Q_{n+1}[C]$ sont les séries caractéristiques des codes $Z_{n+1} = (Z_n \setminus Q_n)Q_n^*$ et $Q_n = Z_n \cap A^{*=n}$. On a donc obtenu le résultat suivant :

Proposition 80 *Soit C un code. Toute C-fonction symétrique de Witt $Q_i[C]$ est la série caractéristique d'un code, et la suite obtenue en omettant l'ensemble vide dans $(Q_1, Q_2, \ldots)$ est la factorisation à droite selon la longueur de C^*.*

Exemple La suite $(a, Q_1[ba^*], Q_2[ba^*], \ldots)$ est une factorisation à droite selon la longueur de A^*, avec $A = \{a, b\}$. La même méthode est applicable pour obtenir une factorisation homogène pour un alphabet non-homogène. Par exemple, considérons l'alphabet $A = \mathbb{N}^*$ avec pour fonction de poids $wt = Id$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
Q_1[A] &= 1\\
Q_2[A] &= 2\\
Q_3[A] &= 21+3\\
Q_4[A] &= 211+31+4\\
Q_5[A] &= 2111+212+311+32+41+5\\
Q_6[A] &= 21111+51+2112+6+3111+312+42+411
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que cela s'obtient aussi à partir de l'exemple du code de préfixe infini par le morphisme $ba^n \mapsto n+1$.

3.3.3 Fonctions symétriques élémentaires non commutatives et élimination de Lazard

Le lien entre élimination de Lazard et fonctions symétriques de Witt non commutatives peut être mieux compris en termes de fonctions symétriques élémentaires. La série génératrice associée aux fonctions symétriques élémentaires Σ_i est :

$$\sigma(t) = \sum_{n\geqslant 0} \Sigma_n t^n$$

Les fonctions symétriques élémentaires sont liées aux fonctions symétriques complètes homogènes par la relation :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma(-t)} = \frac{1}{1-\Sigma_1 t + \Sigma_2 t^2 - \ldots + (-1)^n \Sigma_n t^n + \ldots}$$

Si l'on note $\tilde{\Sigma}_n = (-1)^{n+1}\Sigma_n$, la série $s(1)$ peut être considérée comme la série caractéristique du monoïde libre $\mathbf{\Sigma}^* = \{\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \ldots, \tilde{\Sigma}_n, \ldots\}^*$. On munit ce monoïde de la fonction de poids définie par $wt(\tilde{\Sigma}_n) = n$. Alors :

Théorème 81 *On a :*

$$\mathbb{F}(\mathbf{\Sigma}, wt) = (Q_1[\mathbf{\Sigma}], Q_2[\mathbf{\Sigma}], \ldots) = (Q_1, Q_2, \ldots) \tag{159}$$

En particulier, on obtient un algorithme simple pour calculer la décomposition des fonctions de Witt symétriques non commutatives dans la base des fonctions symétriques élémentaires. Calculons ainsi les premiers Q_i :

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \Sigma_1,\\
Q_2 &= -\Sigma_2,\\
Q_3 &= -\Sigma_2\Sigma_1 + \Sigma_3,\\
Q_4 &= -\Sigma_2\Sigma_1\Sigma_1 + \Sigma_3\Sigma_1 - \Sigma_4,\\
Q_5 &= -\Sigma_2\Sigma_1^3 + \Sigma_2\Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_3\Sigma_1\Sigma_1 - \Sigma_3\Sigma_2 - \Sigma_4\Sigma_1 + \Sigma_5,\\
Q_6 &= -\Sigma_2\Sigma_1^4 + \Sigma_5\Sigma_1 + \Sigma_2\Sigma_1\Sigma_1\Sigma_2 - \Sigma_6 + \Sigma_3\Sigma_1^3 - \Sigma_3\Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_4\Sigma_2\\
&\quad -\Sigma_4\Sigma_1\Sigma_1,\\
Q_7 &= -\Sigma_3\Sigma_1^2\Sigma_2 + \Sigma_3\Sigma_1^4 - \Sigma_3\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_1 + \Sigma_3\Sigma_1\Sigma_3 + \Sigma_3\Sigma_2^2 - \Sigma_4\Sigma_1^3\\
&\quad +\Sigma_4\Sigma_1\Sigma_2 - \Sigma_4\Sigma_3 + \Sigma_4\Sigma_2\Sigma_1 + \Sigma_5\Sigma_1^2 - \Sigma_5\Sigma_2 - \Sigma_6\Sigma_1 + \Sigma_7\\
&\quad -\Sigma_2\Sigma_1^5 + \Sigma_2\Sigma_1^3\Sigma_2 + \Sigma_2\Sigma_1^2\Sigma_2\Sigma_1 - \Sigma_2\Sigma_1^2\Sigma_3 - \Sigma_2\Sigma_1\Sigma_2^2
\end{aligned}
$$

La décomposition des fonctions élémentaires dans la base $Q_\alpha = Q_{a_1} \dots Q_{a_m}$ est obtenue en identifiant les termes des séries :

$$\frac{1}{s(t)} = \sigma(-t) = 1 - \sum_n \tilde{\Sigma}_n t^n = \overleftarrow{\prod_i}(1 - Q_i t^i).$$

On obtient ainsi :

$$\tilde{\Sigma}_n \quad = \quad \sum_m (-1)^m \sum_{\substack{a_1 > \dots > a_m \\ a_1 + \dots + a_m = n}} Q_{a_1} \dots Q_{a_m} \tag{160}$$

Références

[1] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh, J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math. **112** (1995), 218-348.

[2] I. Gessel, *Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions*, Contemp. Math. **34** (1984), 289-301.

[3] M. Hazewinkel, *Formal Groups and Applications*, Academic Press, New York, 1978.

[4] M. Hazewinkel, *Hopf algebras of endomorphisms of Hopf algebras*, Preprint, CWI, 2004.

[5] M. Hazewinkel, *Symmetric functions, noncommutative symmetric functions, and quasisymmetric functions*, Acta Appl. Math. **75** (2003), 55-83.

[6] S. Lang, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

[7] J.-G. Luque et J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions associed with a code, Lazard elimination, and Witt vectors*, DMTCS vol. **9 :2** (2007), 59-72.

[8] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edn, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[9] C. Malvenuto et C. Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. of Algebra **177** (1994), 967-982.

[10] S. Poirier et C. Reutenauer, *Algèbres de Hopf de tableaux*, Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), 79-90.

[11] C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, Oxford University Press, 1993.

[12] C. Reutenauer, *On symmetric functions related to Witt vectors and the free Lie algebra*, Adv. Math. **110** (1995), 234-246.

[13] T. Scharf et J.-Y. Thibon, *On Witt vectors and symmetric functions*, Algebra Colloq. **3** (1996), 231-238.

[14] L. Solomon, *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, J. of Algebra **41** (1976), 255-268