TD 2 : Les triangles

Exercice 1 Démontrer qu'un triangle ABC dans lequel la hauteur et la médiatrice issues de A coïncident, est isocèle en A. Reprendre cet exercice avec des hypothèses similaires illustrant quelques particularités des droites remarquables d'un triangle.

Exercice 2 Soit $ABCD$ un parallélogramme et E le symétrique de B par rapport à D. Montrer que D est le centre de gravité du triangle AEC.

Exercice 3 Soit $ABCD$ un parallélogramme E le symétrique de C par rapport à D. Construire à la règle seule le centre de gravité du triangle BEC.

Exercice 4

1. Montrer qu'une médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire.
2. En déduire que les trois médianes d'un triangle partage ce triangle en six triangles de même aire.

Exercice 5 Construire un triangle, connaissant un côté et son centre de gravité.

Exercice 6 Retrouver le centre d'un cercle à l'aide d'une seule équerre. Justifier la construction.

Exercice 7 Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$; les droites (AJ) et (CI) coupent la diagonale (BD) en E et F respectivement. Montrer que $DE = EF = FB$.

Exercice 8 On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O ; par un point M extérieur à ces droites, on mène une perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M qui coupe $\mathcal{D}'$ en A, puis une perpendiculaire à $\mathcal{D}'$ passant par M qui coupe $\mathcal{D}$ en B. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (OM).

Exercice 9 Soit $ABCD$ un carré et E un point extérieur à ce carré tel que BCE soit un triangle équilatéral. On note F le milieu de $[BC]$.

1. Construire la figure à la règle et au compas en supposant que $[AB]$ mesure 6 cm.
2. Placer le centre O du cercle circonscrit au triangle ADE.
3. Montrer que $CDOE$ est un losange.
4. Montrer que (EA) est bissectrice de l'angle $\widehat{BEF}$.
5. Préciser le rayon du cercle circonscrit au triangle ADE.
6. Soit H le point intérieur au carré $ABCD$ tel que CDH soit aussi un triangle équilatéral. Prouver que les points A, H et E sont alignés.

Exercice 10 Soit ABC un triangle d'orthocentre H, et D le point du cercle circonscrit à ce triangle ABC, diamétralement opposé à A.

1. Montrer que $BDCH$ est un parallélogramme.
2. Montrer que le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite (BC) est un point du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 11 A l'aide d'une règle et d'un compas, construire les deux hauteurs $[BB']$ et $[CC']$ d'un triangle ABC, puis construire les milieux I et I' des segments $[BC]$ et $[B'C']$. Montrer que la droite (II') est médiatrice de $[B'C']$.

Exercice 12 Soit ABC un triangle ; on désigne par A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Construire la figure à la règle et au compas.
2. Montrer que les droites (AC), (AB) et (BC) sont respectivement parallèles à $(A'C')$, $(A'B')$ et $(B'C')$.
3. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité.
4. Comparer les aires de ces triangles.

Exercice 13 Soit $ABCD$ un carré et E un point de $[BC]$, distinct de B et C. Le cercle circonscrit au triangle ACE coupe (CD) en C et en un second point noté F. Montrer que $BE = DF$.

Exercice 14 Découper, à la règle et au compas, un segment $[AB]$ donné en 5 segments de même longueur.