Chapitre 5 : Les polygones réguliers

1 Angles inscrits dans un cercle, angle au centre

Définition 1 *Etant donné un cercle de centre O, on appelle* ***angle inscrit*** *dans ce cercle tout angle $\widehat{BAC}$ dont le sommet A et les points B, C sont des points de ce cercle, et dont les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont deux cordes de ce cercle.*

Tout angle inscrit $\widehat{BAC}$ ***intercepte*** *un arc de cercle, l'arc reliant B à C et ne contenant pas le point A.*

On appelle ***angle au centre*** *associé à un angle inscrit $\widehat{BAC}$, l'angle $\widehat{BOC}$ interceptant le même arc de cercle.*

Proposition 2 *La mesure d'un angle inscrit $\widehat{BAC}$ dans un cercle est la moitié de la mesure de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ associé.*

2 Définitions et généralités

Définition 3 *Un* ***polygone régulier*** *est un polygone convexe ou non convexe (auquel cas il est dit étoilé), dont les angles (intérieurs) ont même mesure et dont les côtés ont même longueur.*

Ainsi un triangle équilatéral, un carré sont des polygones réguliers ; un rectangle, un losange ne sont des polygones réguliers que lorsque ce sont des carrés.

Théorème 4 *Tout polygone régulier admet un* ***cercle circonscrit****, c'est-à-dire un cercle passant par chaque sommet ; il admet aussi un* ***cercle inscrit****, c'est-à-dire un cercle tangent intérieurement à chaque côté du polygone régulier. Ces deux cercles ont même centre, appelé* ***centre du polygone régulier****.*

On dit que tout polygone régulier est inscrit dans son cercle circonscrit.

Définition 5 *On appelle* ***apothème*** *d'un polygone régulier la distance du centre à l'un des côtés ; l'apothème mesure donc le rayon du cercle inscrit dans le polygone, également appelé apothème. Etant donné un côté $[AB]$ d'un polygone régulier, l'angle $\widehat{AOB}$ est appelé* ***angle au centre*** *de ce polygone.*

Proposition 6 *Etant donné un polygone convexe ayant n côtés, une mesure d'un angle au centre est $\dfrac{2\pi}{n}$ rad ou $\dfrac{360^\circ}{n}$.*

3 Polygones réguliers et isométries

Proposition 7
- *Si une isométrie conserve globalement un polygone régulier, c'est nécessairement une réflexion ou une rotation.*
- *Il existe $2n$ isométries qui conservent globalement un polygone régulier ayant n côtés.*
- *Un polygone régulier ayant n côtés admet un centre de symétrie si n est pair ; si n est impair, il n'a pas de centre de symétrie.*

4 Inscription d'un polygone régulier dans un cercle donné

Le problème est le suivant : comment inscrire un polygone régulier possédant n côtés, convexe ou non, dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R donné, à l'aide d'une règle et d'un compas ?

Ce problème n'a pas toujours de solution ; si la réponse est simple pour $n = 3, 4, 6, 8, 12$ ou 16 elle est plus délicate pour $n = 5, 10, 15, 17\ldots$, voir impossible pour $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19\ldots$ selon des résultats énoncés par Gauss puis Wantzel.

Notations. n étant le nombre de côtés du polygone, on notera c_n et a_n (resp c'_n et a'_n) la mesure du côté et de l'apothème du polygone régulier convexe (resp. étoilé).

Il est à noter qu'un polygone convexe n'admet pas nécessairement de polygone étoilé associé, ou peut en admettre plusieurs.

On désigne par O le centre du cercle $\mathcal{C}$ de rayon R ; les constructions ci-dessous sont classées par ordre de difficulté croissante, et reposent sur l'examen des angles au centre des polygones réguliers étudiés.

1. Le carré ($n = 4$).
   L'angle au centre mesure 90°, il suffit donc tracer deux diamètres perpendiculaires. L'angle (intérieur) d'un carré mesure 90°, et $c_4 = R\sqrt{2}, a_4 = R\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. L'octogone régulier convexe ($n = 8$).
   Puisque l'angle au centre mesure 45°, les bissectrices des diamètres précédents et ces diamètres fournissent les huit sommets recherchés. L'angle d'un octogone régulier convexe mesure 135° et $c_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}, a_8 = R\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
3. L'octogone régulier étoilé ($n = 8$).
   Les huit sommets de l'octogone précédent reliés de deux en deux, redonnent un carré inscrit dans $\mathcal{C}$; reliés de trois en trois (ou de cinq en cinq) on obtient un octogone régulier étoilé. L'angle d'un octogone régulier étoilé mesure 45° et $c'_8 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}, a'_8 = R\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
4. L'hexagone régulier ($n = 6$).
   Les angles au centre mesurent 60° et de ce fait si A et B sont deux sommets consécutifs, le triangle OAB est équilatéral. Chaque côté a pour longueur R, et la construction des six sommets consiste à reporter 6 fois R. L'angle d'un hexagone régulier convexe mesure 120°, et $c_6 = R, a_6 = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Le triangle équilatéral ($n = 3$).
   L'angle au centre d'un triangle équilatéral mesure 120° ; les sommets précédents, reliés de deux en deux, permettent donc d'inscrire un triangle équilatéral dans le cercle. L'angle d'un triangle équilatéral est de 60°, $c_3 = R\sqrt{3}, a_3 = \dfrac{R}{2}$.
6. Le décagone régulier convexe ($n = 10$).
   Il admet une construction assez simple :
   (a) Supposons avoir inscrit un décagone régulier convexe dans le cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire avoir mesuré un angle au centre de 36°. Alors le côté du décagone régulier convexe mesure

$$c_{10} = R\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

(b) Soit $[AB]$ un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et $[OC]$ un rayon de ce cercle, perpendiculaire à (AB). Soit I le centre du cercle de diamètre $[OC]$; la droite (AI) coupe ce cercle en D et E, D étant entre A et E. On peut calculer AD qui est égal à c_{10}.

Par ailleurs, on obtient $a_{10} = R\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, et l'angle d'un décagone régulier convexe mesure 144°.

7. Le décagone régulier étoilé ($n = 10$).
En reliant les sommets du décagone régulier convexe de trois en trois, on obtient un décagone régulier étoilé. L'angle d'un décagone régulier étoilé mesure 72°, et $c'_{10} = R\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a'_{10} = R\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
8. Le pentagone régulier convexe ($n = 5$).
Les cinq sommets d'un pentagone régulier convexe peuvent être obtenus en reliant de deux en deux les sommets du décagone régulier convexe. L'angle d'un pentagone régulier convexe mesure 108°, et $c_5 = R\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, $a_5 = R\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.
9. Le pentagone régulier étoilé ($n = 5$).
Les cinq sommets précédents reliés de deux en deux (ou de trois en trois), permettent de représenter un pentagone régulier étoilé. Son angle mesure 36°, et $c'_5 = R\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$, $a'_5 = R\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Il existe d'autres constructions de ces polygones, certaines seront développées en exercice.