Chapitre 2 : Isométries et figures élémentaires

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{P}$ désigne le plan usuel.

1 Isométries planes : quelques propriétés élémentaires, et nécessaires

Définition 1 – *On appelle **bijection** de $\mathcal{P}$ toute application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que tout point de $\mathcal{P}$ admette un et un seul antécédent, c'est-à-dire : Quelque soit A' dans $\mathcal{P}$, il existe un et un seul point A dans $\mathcal{P}$ tel que $f(A) = A'$. Toute bijection du plan est donc inversible.*
- *On appelle **identité** du plan (notée Id) l'application qui à tout point A du plan $\mathcal{P}$ associe A.*

Définition 2 *Une **isométrie plane** est une **bijection** de $\mathcal{P}$ qui conserve les **distances**. Ceci signifie que si A' et B' sont les images de deux points A et B par une isométrie plane, alors $AB = A'B'$.*

Proposition 3 – *Le produit de composition de deux isométries est une isométrie.*
- *Toute isométrie est inversible et son inverse est une isométrie.*
- *Toute isométrie conserve le milieu d'un segment : ceci signifie que si A' et B' sont les images de deux points A et B par une isométrie, alors l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.*
- *Toute isométrie conserve le produit scalaire.*
- *Toute isométrie conserve le barycentre : ceci signifie que si G est le barycentre d'un système pondéré de points, alors l'image de G par une isométrie est le barycentre du système image, avec les mêmes pondérations.*

Conséquences fondamentales :
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.
- L'image d'une demi-droite par une isométrie est une demi-droite, les extrémités se correspondent, c'est-à-dire que $f([AB)) = [A'B')$.
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment de même longueur, les extrémités se correspondent.
- L'image d'un secteur angulaire par une isométrie est un secteur angulaire de même mesure.
- L'image d'un couple de droites parallèles (resp. perpendiculaires) est un couple de droites parallèles (resp. perpendiculaires).
- L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme, celle d'un triangle est un triangle, celle d'un carré est un carré, et plus généralement, l'image d'un polygone par une isométrie est un polygone de même nature dont les côtés et les angles ont mêmes mesures.
- L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon, et l'image d'une droite tangente (resp. sécante) est une droite tangente (resp. sécante), les points de contact ou d'intersection se correspondent.

2 Symétries, médiatrices, bissectrices

2.1 Symétrie centrale

Définition 4 *On appelle **symétrie centrale de centre** O, ou encore **symétrie de centre** O, ou encore **symétrie par rapport à** O, l'application notée s_O qui à tout point A du plan associe le point A' tel que O soit le milieu du segment $[AA']$. L'image du point O est donc le point O.*

Proposition 5
- *Le point O est l'unique point invariant de s_O.*
- *Toute symétrie centrale est une isométrie.*
- *Elle est involutive : s_O est sa propre inverse.*
- *Toute droite passant par O est globalement invariante par s_O.*
- *L'image par s_O d'une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.*

Remarque. Notons qu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement s'il est convexe et admet un centre de symétrie, le point d'intersection de ses diagonales.

2.2 Médiatrice d'un segment

Définition 6 *Etant donnés deux points distincts A et B, on appelle **médiatrice** du segment $[AB]$ l'ensemble des points du plan équidistants de A et B.*

Proposition 7 *La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment, qui passe par le milieu de ce segment.*

2.3 Symétrie axiale, ou réflexion, ou symétrie orthogonale

Définition 8 *Etant donnée une droite Δ, on appelle **réflexion d'axe** Δ, ou encore **symétrie orthogonale d'axe** Δ, ou encore **symétrie axiale d'axe** Δ, notée s_Δ, l'application qui à tout point A du plan associe le point A' tel que :*
- *Δ est la médiatrice de $[AA']$ si A n'est pas un point de Δ.*
- *A' est confondu avec A si A est un point de Δ.*

Proposition 9
- *s_Δ admet une infinité de points invariants : les points de Δ.*
- *Toute réflexion ou symétrie axiale est une isométrie, elle est involutive.*
- *L'image par une réflexion s_Δ d'une droite parallèle à Δ est une droite parallèle à Δ.*
- *L'image par une réflexion s_Δ d'une droite sécante à Δ en O est une droite passant par O.*

2.4 Bissectrices

Proposition 10 *Etant données deux droites sécantes, il existe exactement deux réflexions qui échangent ces droites.*

Définition 11 *Etant données deux droites sécantes en O, on appelle **bissectrices** du couple de droites les axes des deux réflexions qui échangent ces droites. Ces deux bissectrices sont perpendiculaires en O. Un angle de deux demi-droites admet une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure, perpendiculaires.*

Proposition 12 *Un point est équidistant de deux droites sécantes si et seulement s'il appartient à l'une des deux bissectrices de ces droites.*

2.5 Le rectangle

Définition 13 *Un* ***rectangle*** *est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.*

Proposition 14 *Un parallélogramme est un rectangle si et seulement s'il admet un (donc quatre) angle droit.*

Proposition 15 *L'aire d'un rectangle est égale au produit des longueurs de ses cotés.*

2.6 Le losange

Définition 16 *Un* ***losange*** *est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.*

Proposition 17
- *Un parallélogramme est un losange si et seulement si deux côtés consécutifs ont même longueur.*
- *Un parallélogramme est un losange si et seulement si chaque diagonale est bissectrice de deux angles opposés.*

Proposition 18 *L'aire d'un losange est égale à la moitié du produit des longueurs de ses diagonales.*

2.7 Le carré

Définition 19 *Un* ***carré*** *est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires.*

Remarque. C'est donc un rectangle et un losange. En particulier, son aire est égale au produit des longueurs de ses cotés et à la moitié du produit des longueurs de ses diagonales.

3 Translations et rotations

3.1 Translations

Définition 20 *Etant donné un vecteur $\overrightarrow{v}$ du plan, on appelle* ***translation*** *de* ***vecteur*** *$\overrightarrow{v}$ l'application notée $t_{\overrightarrow{v}}$ qui à tout point A du plan associe le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$.*

Proposition 21
- *$t_{\overrightarrow{v}}$ est l'identité du plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{v}$ est nul.*
- *Si le vecteur $\overrightarrow{v}$ n'est pas nul, la translation n'a aucun point invariant.*
- *Toute translation est une isométrie.*
- *Toute translation peut se décomposer en un produit de deux réflexions.*

3.2 Rotations

Définition 22 *Etant donnés un point O et un nombre réel θ, on appelle* ***rotation*** *de* ***centre*** *O et d'****angle*** *θ, l'application notée $R_{O,\theta}$ définie par :*
- *L'image de O est le point O.*
- *Si un point A est distinct de O alors son image par $R_{O,\theta}$ est un point A' tel que :*
  - *$OA = OA'$.*
  - *$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$ radians (mod 2π) (angle orienté).*

Proposition 23
- *Si $\theta = 0$ (mod 2π), $R_{O,\theta}$ est l'identité du plan.*
- *Si $\theta \neq 0$ (mod 2π), $R_{O,\theta}$ admet un unique point invariant, le centre O de la rotation.*
- *Si $\theta = \pi$ (mod 2π), alors $R_{O,\theta}$ est la symétrie de centre O.*
- *Toute rotation est le produit de composition de deux réflexions.*
- *Toute rotation est une isométrie.*

4 Une classification des isométries

Proposition 24

- *Une isométrie plane admettant trois points invariants non alignés est l'identité.*
- *Une isométrie plane admettant deux points invariant, A et B est ou bien l'identité, ou bien la réflexion d'axe (AB).*
- *Une isométrie plane admettant un unique point invariant A est une rotation de centre A.*
- *Une isométrie plane n'ayant aucun point invariant est une translation ou le produit de composition de trois réflexions.*