Complément 3

Somme direct de sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit la somme $F_1+F_2+\cdots+F_k$ des sous-espaces $F_1,\ldots,F_k$ par :

$$F_1+F_2+\cdots+F_k=\{x_1+x_2+\cdots+x_k|x_i\in F_i,\forall 1\leq i\leq k\}.$$

Ainsi on a :

$$x\in F_1+\cdots+F_k \quad\Leftrightarrow\quad \exists(x_1,\ldots,x_k)\in F_1\times\cdots\times F_k,\quad x=x_1+\cdots+x_k.$$

Propriété 1

$F_1+F_2+\cdots+F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Même preuve que dans le cas $k=2$. □

Remarques.

- Soient F,G,H des sous-espaces vectoriels de E. Par associativité de $+$, on a $(F+G)+H=F+(G+H)=F+G+H$.
- Pour tout $1\leq i\leq k$, F_i est un sous-espace vectoriel de $F_1+F_2+\cdots+F_k$.
- On peut montrer que $F_1+F_2+\cdots+F_k=Vect(\cup_{1\leq i\leq k}F_i)$.

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $F_1+F_2+\cdots+F_k$ est directe, et on note $F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_k$, si :

$$\forall x\in F_1+\cdots+F_k,\quad \exists!(x_1,\ldots,x_k)\in F_1\times\cdots\times F_k,\quad x=x_1+\cdots+x_k.$$

Propriété 2

La somme $F_1+F_2+\cdots+F_k$ est directe si et seulement si on a :

$$\forall(x_1,\ldots,x_k)\in F_1\times\cdots\times F_k,\quad x_1+\cdots+x_n=0_E \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2=\cdots=x_k=0_E.$$

Preuve. Même preuve que dans le cas $k=2$. □

Propriété 3

Si la somme $\sum_{1\leq i\leq k} F_i$ est directe, et si $J \subset [|1,k|]$, alors $\sum_{i\in J} F_i$ est également directe. En particulier, pour tous $1 \leq i < j \leq k$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Preuve. C'est immédiat en utilisant la caractérisation précédente. □

Remarque. La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que pour tous $1 \leq i < j \leq k$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ que la somme $\sum_{1\leq i\leq k} F_i$ est directe. Par exemple trois droites vectorielles coplanaires ne sont jamais en somme directe, alors que deux quelconques d'entre elles le sont dès qu'elles sont distinctes.

Propriété 4

La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est directe si et seulement si pour tout $2 \leq i \leq k$,

$$F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1}) = \{0_E\}.$$

Preuve.

$\Rightarrow$ Soit $2 \leq i \leq k$ et prenons $x \in F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1})$. Il existe alors $(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in F_1 \times \cdots \times F_{i-1}$ tels que :

$$x = x_1 + \cdots + x_{i-1} \quad \text{soit encore} \quad x_1 + \cdots + x_{i-1} + (-x) = 0_E$$

On en déduit alors (puisque $x \in F_i$ et que $\sum_{1\leq j\leq i} F_i$ est directe) que $x_1 = \cdots = x_{i-1} = x = 0_E$. Ainsi on a bien $F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1}) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$ Soient $(x_1, \ldots, x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$ tels que $x_1 + \cdots + x_k = 0_E$. Alors $x_k = -x_1 - \cdots - x_{k-1} \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0_E\}$. Ainsi $x_k = 0_E$. En itérant ce raisonnement, on obtient que $x_1 = \cdots = x_k = 0_E$. La somme $\sum_{1\leq i\leq k} F_i$ est donc directe.

□

Propriété 5

Supposons que E est de dimension finie, et notons $\mathcal{B}_i$ une base de F_i pour tout $1 \leq i \leq k$. La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est directe si et seulement si la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ est une base de $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$.

Preuve. Procédons par récurrence sur k.

- Pour $k = 2$, on a déjà démontré cette propriété.
- Soit $k \geq 2$ et supposons la propriété au rang k vraie.

  Considérons une famille $(F_i)_{1\leq i\leq k+1}$ de $k+1$ sev, et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i pour tout $1 \leq i \leq k+1$. On a :

$$\begin{aligned}
F_1 + \cdots + F_{k+1} \text{ directe} &\Leftrightarrow F_1 + \cdots + F_k \text{ directe et } F_{k+1} \cap (F_1 + \cdots + F_k) = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k \text{ est une base de } F_1 + F_2 + \cdots + F_k \\
&\quad\ \text{et } F_{k+1} \cap (F_1 + \cdots + F_k) = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k) \cup \mathcal{B}_{k+1} \text{ est une base de } (F_1 + \cdots + F_k) + F_{k+1}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence a été démontrée dans le cours pour la somme de deux sous-espaces. D'où la propriété au rang $k+1$. On conclut par principe de récurrence.

$\square$

Propriété 6

Supposons que E est de dimension finie.

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k \text{ est directe} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_k) = \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_k).$$

Remarque. On a toujours $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_k) \leq \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_k)$. En effet on avait vu que $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G)$. On généralise sans difficulté cette relation par récurrence.

Preuve.

$\Rightarrow$ Cela découle directement de la proposition précédente.

$\Leftarrow$ Par récurrence sur $k \geq 2$.

- Si $k = 2$, cela a été démontré dans le cours.
- soit $k \geq 2$ et supposons la propriété au rang k. Considérons une famille $(F_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ de $k+1$ sev tels que :

$$\dim(F_1) + \cdots + \dim(F_{k+1}) = \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{k+1}).$$

On a $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_k) \leq \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_k)$ et par la formule de Grassman :

$$\dim(F_1+F_2+\cdots+F_{k+1}) = \dim(F_1+F_2+\cdots+F_k)+\dim(F_{k+1})-\dim(F_{k+1}\cap(F_1 + \cdots + F_k)) \quad (*)$$

On obtient $\dim(F_{k+1} \cap (F_1 + \cdots + F_k)) = 0$ $(**)$: en effet, on aurait sinon :

$$\dim(F_1+F_2+\cdots+F_{k+1}) < \dim(F_1+F_2+\cdots+F_k)+\dim(F_{k+1}) \leq \dim(F_1)+\cdots+\dim(F_k)+\dim(F_{k+1}).$$

En reprenant l'égalité $(*)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_{k+1}) &= \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_k) + \dim(F_{k+1}) \\ &= \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_{k+1}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\dim(F_1) + \cdots + \dim(F_k) = \dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_k)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a que $\sum_{1 \leq i \leq k} F_i$ est directe, et avec $(**)$ que $\sum_{1 \leq i \leq k+1} F_i$ est directe. D'où la propriété au rang $k+1$.

On conclut par principe de récurrence.

$\square$