Chapitre 10

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Propriété 1 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas complexe))

Soient $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.

Remarque. L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Preuve. • Supposons d'abord que l'équation admette deux solutions $r_1 \neq r_2$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. On cherche $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{array}\right.$. Ce système admet une unique solution $(\lambda, \mu) = (\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}, \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1})$. Ainsi, si (λ, μ) conviennent, alors leurs valeurs sont données par la résolution de ce système et donc le couple (λ, μ) sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
On a $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ vérifiées par définition de (λ, μ).
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n(ar_1 + b) + \mu r_2^n(ar_2 + b) = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \end{aligned}$$

car $r_1^2 = ar_1 + b$ et $r_2^2 = ar_2 + b$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
• Supposons maintenant que l'équation admette une solution double $r \neq 0$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{array}\right.$ Ce système a une unique solution $(\lambda, \mu) = (u_0, \frac{u_1 - r u_0}{r})$. Ainsi, le couple (λ, μ) sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.
On a $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ vérifiées par définition de (λ, μ).
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et

$u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n &= a(\lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ &= \lambda r^n(ar+b) + \mu n r^n(ar+b) + \mu r^{n+1} a = \lambda r^{n+2} + \mu(n+2)r^{n+2} \end{aligned}$$

car $r^2 = ar + b$ et $r = \frac{a}{2}$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. $\square$

Propriété 2 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas réel))

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors: $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.
- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors : $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n\left(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\right)$

Preuve.

- Les deux premiers cas s'obtiennent comme dans le cas complexe. Les scalaires (λ, μ) déterminés en résolvant les systèmes introduits dans la preuve seront cette fois réels.
- Supposons que l'équation admette deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$.
  D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar^n e^{in\theta} + Br^n e^{-in\theta}$. Montrons que $B = \overline{A}$:
  On sait que :
  $$\begin{cases} A + B = u_0 & (L_1) \\ Ar_1 + B\overline{r_1} = u_1 & (L_2) \end{cases}$$
  En faisant $(L_2) - \overline{r_1}(L_1)$, on obtient : $A = \frac{u_1 - \overline{r_1}u_0}{r_1 - \overline{r_1}}$
  En faisant $(L_2) - r_1(L_1)$, on obtient : $B = \frac{u_1 - r_1 u_0}{\overline{r_1} - r_1} = \overline{A}$
  ($r_1 \neq \overline{r_1}$ car $r_1 \notin \mathbb{R}$).
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
  $$\begin{aligned} u_n &= Ar^n e^{in\theta} + \overline{A}r^n e^{-in\theta} \\ &= r^n \times 2Re\left(Ae^{in\theta}\right) \\ &= r^n\left(2Re(A)\cos(n\theta) - 2Im(A)\sin(n\theta)\right) \end{aligned}$$

$\square$

Remarque. On redémontrera ces résultats plus tard dans l'année dans le chapitre d'algèbre linéaire.