Chapitre 8

Ensembles et applications

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint-Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Ensembles

1.1 Ensembles, sous-ensembles

Définition.

- Un **ensemble** E est une collection ou un groupement d'objets distincts. Les objets x de E s'appellent les **éléments** de E.
- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x **appartient à** E ou que x **est dans** E et on écrit $x \in E$.

  Dans le cas contraire, si x n'est pas un élément de E, on dit que x **n'appartient pas à** E ou que x **n'est pas dans** E et on écrit $x \notin E$.

Pour définir un ensemble, on peut le décrire:

- par extension, en donnant entre accolades la liste de ses éléments.

  Exemple. $E = \{0, 2, 4, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.
- par compréhension, en donnant toujours entre accolades une propriété caractéristique des éléments.

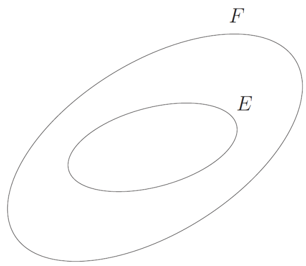
  Exemple. $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ impair }\}$ est aussi l'ensemble des entiers relatifs impairs.

Remarque. Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. C'est l'**ensemble vide** noté $\emptyset$.

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F et on écrit $E \subset F$ si tout élément de E est un élément de F.

Diagramme de Venn. Ce sont des représentations schématiques d'ensembles. Par exemple, on peut schématiser l'inclusion $E \subset F$ de la façon suivante:



► *Pour montrer que $E \subset F$, on prend un élément x quelconque de E et on prouve que x appartient à F.*

Exemples. Soit E l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et F l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que $E \subset F$.

Définition.

Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble A est une **partie** de E ou un **sous-ensemble** de E si A est inclus dans E. L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarques.

1. Il est important de bien distinguer les deux symboles $\in$ et $\subset$: le premier concerne un élément appartenant à un ensemble, le second concerne un ensemble inclus dans un autre ensemble.

   Par exemple, la notation $A \subset E$ a la même signification que la notation $A \in \mathcal{P}(E)$.
2. On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple. Déterminer l'ensemble des parties de E lorsque:

- $E = \{a, b\}$:
- $E = \{a, b, c\}$:

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont **égaux** et on note $E = F$ si et seulement si E et F ont les mêmes éléments.

Théorème 1 (Égalité d'ensembles)

Soient E et F deux ensembles. Alors:

$$E = F \quad \text{si et seulement si} \quad E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

► *Pour montrer que $E = F$, on peut procéder par double inclusion ou bien raisonner directement par équivalence.*

1.2 Union et intersection

Dans ce paragraphe, E est un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

- L'**intersection** de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

  En d'autres termes, l'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments **qui appartiennent à** A **et à** B.

- L'**union** de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

  En d'autres termes, l'union de A et de B est l'ensemble des éléments **qui appartiennent à** A **ou à** B. Le "ou" utilisé ici est inclusif: x est un élément de A ou un élément de B ou un élément de A et de B.

Diagramme de Venn.

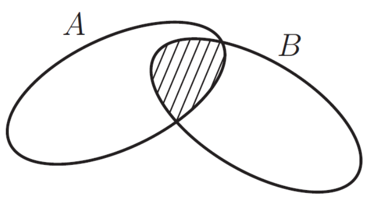


Schéma de $A \cap B$
(Cas où A et B ne sont pas disjoints)

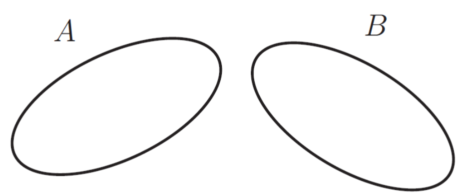


Schéma de $A \cap B$
(Cas où A et B sont disjoints)

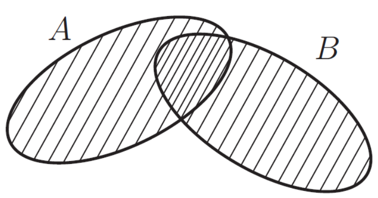


Schéma de $A \cup B$
(Cas où A et B ne sont pas disjoints)

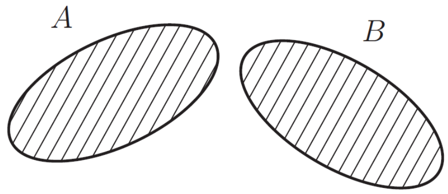


Schéma de $A \cup B$
(Cas où A et B sont disjoints)

Remarque. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Alors, on a toujours les inclusions suivantes:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B,$$
$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Propriété 2 (Propriétés algébriques de l'intersection et l'union)

(1) L'intersection et l'union sont **commutatives** : pour tous éléments $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

(2) L'intersection et l'union sont **associatives** : pour tous éléments $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

Ici $A \cap B \cap C$ est l'ensemble des éléments communs aux trois sous-ensembles A, B et C et $A \cup B \cup C$ est l'ensemble des éléments qui sont dans l'un au moins des trois sous-ensembles A, B et C.

(3) E est **élément neutre** pour l'intersection : pour tout élément $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap E = A$.
$\emptyset$ est **élément neutre** pour la réunion : pour tout élément $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \cup \emptyset = A$.

(4) L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une de l'autre : pour tous éléments $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Preuve. Les trois premières assertions se vérifient sans difficulté. Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On a :

$$\begin{array}{lcl}
x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\
x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\
x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & (x \in A \text{ et } B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } C) \\
x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\
x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{array}$$

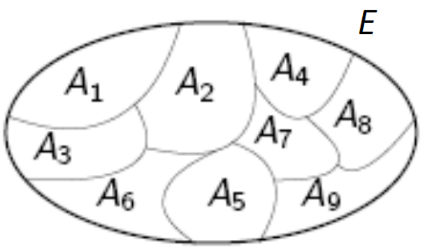
On montre de même l'égalité $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

Définition.

Une **partition d'un ensemble** E est un ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ constitué de parties de E vérifiant:

- $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $A_k \neq \emptyset$ (aucun A_k ne doit être vide).
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$ (la réunion des A_k est égale à E).
- $\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit que les A_i sont deux à deux disjoints).

Diagramme de Venn.



Exemples. Donner toutes les partitions de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

1.3 Complémentaire

Définition.

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. La **différence** de A avec B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B. Autrement dit:

$$A \setminus B = \{x \in A \ | \ x \notin B\}.$$

On obtient les diagrammes de Venn suivant:

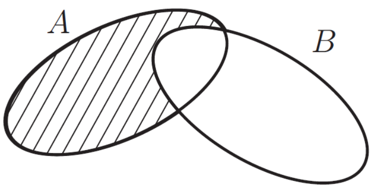


Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B \neq \emptyset$)

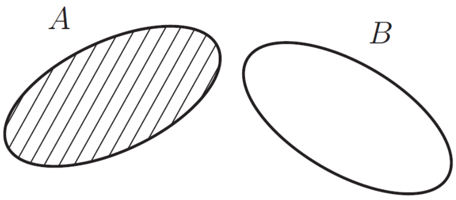


Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B = \emptyset$)

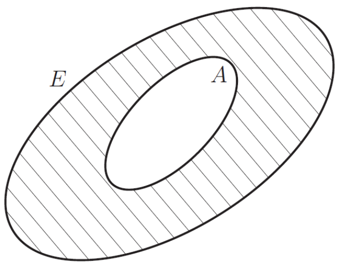
Définition.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble, noté $\complement_E^A$, de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. Autrement dit:

$$\complement_E^A = \{x \in E \ | \ x \notin A\} = E \setminus A.$$

Remarque. S'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble E, on privilégiera la notation $\overline{A}$ ou A^c.

Diagramme de Venn.



Propriété 3 (Propriétés algébriques du complémentaire)

Soient A et B deux parties de E.

(1) $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$.

(2) Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(3) Lois de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Preuve.

(1) $\overline{\overline{A}} = A$: on a par définition $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$. Il en résulte donc par négation :

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in A$$

ce qui s'écrit aussi $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow x \in A$. Par définition, on a les égalités $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$.

(2) Supposons que $A \subset B$. Alors par définition

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Cette proposition est équivalente à sa contraposée :

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A.$$

On a ainsi montré que si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(3) Montrons $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. On a par définition

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \in B).$$

Il en résulte par négation

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A) \text{ ou } (x \notin B),$$

ce qui se réécrit

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Pour la deuxième égalité, on pose $C = \overline{A}, D = \overline{B}$. On a $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cup \overline{D}$. D'où en remplaçant et en prenant le complémentaire : $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}} = \overline{A \cup B}$.

□

1.4 Produit cartésien

Définition.

Soient A et B deux parties de E. Le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, constitué de tous les couples (x, y) où x est un élément de A et y un élément de B. On a donc:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Remarques.

1. La définition précédente se généralise. Soient n un entier supérieur ou égale à 2 et $A_1, \ldots, A_n$ n sous-ensembles de E. Le **produit cartésien** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est l'ensemble des listes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, appelées n-**uplets**, où $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in A_i$. On a donc:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall\, i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i\}.$$

2. Lorsque $A = B$, on note $A \times A = A^2$ et on généralise cette notation pour l'ensemble $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (produit cartésien de n facteurs égaux à A).

Propriété 4 (Propriétés algébriques du produit cartésien)

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E.

(1) $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.

(2) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Preuve. On montre l'égalité (1) :

$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D) &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in D)\\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in C \text{ ou } y \in D)\\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times (C \cup D)\end{aligned}$$

□

Remarque. En général $(A \times C) \cup (B \times D)$ n'est pas égal à $(A \cup B) \times (C \cup D)$. Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, $([0; 1] \times [0; 1]) \cup ([-1; 0] \times [-1; 0])$ est différent de l'ensemble $[-1; 1] \times [-1; 1]$.

2 Applications

2.1 Définitions

Définition.

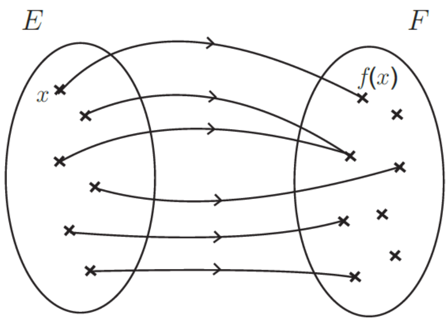
Soient E et F deux ensembles. On dit que f est une **application** de E dans F lorsqu'à tout élément x de E, f associe un unique élément de F, appelé **image** de x par f et noté $f(x)$. E est l'**ensemble de départ** de f et F est l'**ensemble d'arrivée** de f. On note:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Si y est un élément de F, on dit que x est un **antécédent** de y par f lorsque $y = f(x)$.
On appelle **graphe** de l'application f le sous-ensemble Γ de $E \times F$ définit par :

$$\Gamma = \{(x, f(x))/x \in E\}.$$

Représentation sagittale.



Notation. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Exemples.

- **Application identité :** On appelle **application identité** d'un ensemble E, et on note Id_E, l'application de E dans E définie par :

$$Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

- **Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble :** Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** de A et on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right.$$

- **Famille d'éléments :** Soit E un ensemble et I un ensemble fini (généralement $I = \{1, \ldots, n\}$). On appelle **famille d'éléments de** E **indéxée par** I toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille.

Définition.

Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée, et si pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) = g(x).$$

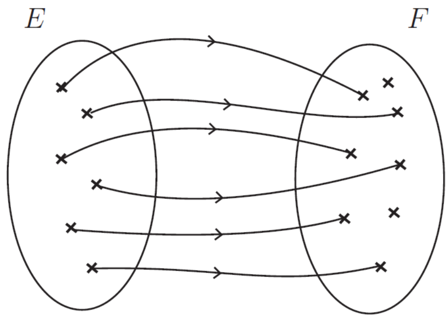
2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

Si une application f associe à tout élément de E une et une seule image, on s'interroge maintenant sur le nombre éventuel d'antécédents d'un élément y de F.

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est **injective** ou est une **injection** si chaque élément de F admet **au plus** un antécédent par f.

Exemple. L'application suivante est injective:



Exemple.

- L'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est injective.
- L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est non injective : $f(2) = f(-2) = 4$.

Propriété 5 (Caractérisation des injections)

Une application $f : E \to F$ est **injective** si et seulement si

$$\forall\, (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

Preuve. Supposons f injective, et soient $y \in F, x_1, x_2 \in E$ tels que

$$y = f(x_1) = f(x_2).$$

L'élément y a ainsi deux antécédents x_1 et x_2 par f. Puisque f est injective, on a donc $x_1 = x_2$.
Pour l'autre implication on procède par contraposition. Si f n'est pas injective, il existe un élément $y \in F$ qui admet au moins deux antécédents $x_1, x_2 \in E$ qui sont distincts. On a donc :

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2.$$

□

► *Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.*

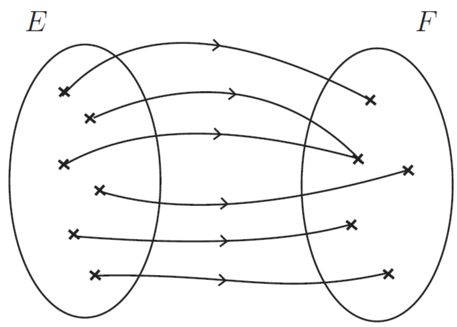
Exemple. On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n + 1$. Montrer que f est injective.

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est **surjective** ou est une **surjection** si chaque élément de F admet **au moins** un antécédent par f, soit :

$$\forall\, y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Exemple. L'application suivante est surjective:



Exemples.

- L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ est surjective.
- L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective.

► *Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on se donne un élément quelconque de F et on montre qu'il a au moins un antécédent dans E.*

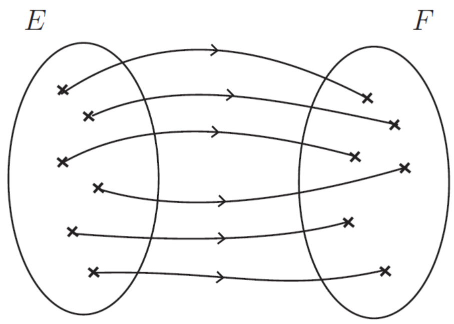
Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est une **bijection** de E dans F si chaque élément de F admet **un unique** antécédent par f:

$$\forall\, y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

Exemples.

- L'application identité Id_E d'un ensemble E est bijective.
- L'application suivante est bijective:



Théorème 6 (Première caractérisation d'une application bijective)

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors:

f est **bijective** $\Leftrightarrow$ f est **injective** et **surjective**

► *Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on pourra raisonner en deux étapes en montrant l'injectivité et la surjectivité de f.*

Exemple. Considérons l'application f définie par:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x + y) \end{array} \right.$$

Montrer que l'application f est bijective.

Remarque. Le changement des ensembles de départ et d'arrivée d'une application modifie ses propriétés (injectivité, surjectivité). On introduit le vocabulaire suivant à propos des changements d'ensembles de départ et d'arrivée d'une application.

Définition.

On considère une application f d'un ensemble E dans un ensemble F.

- Si E est un sous-ensemble de A, on appelle **prolongement de f à A** toute application $\overline{f}$ définie de A dans F qui coïncide avec f sur E : $\forall x \in E,\ \overline{f}(x) = f(x)$.
- Si A est un sous-ensemble de E, on appelle **restriction de f à A** l'application notée $f_{|A}$ définie de A dans F par : $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$.
- Plus généralement, A est un sous-ensemble de E et $f(A)$ un sous-ensemble de B, on dit que f **induit l'application $\tilde{f}$ de A dans B** définie par : $\forall x \in A,\ \tilde{f}(x) = f(x)$.

Exemples. L'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. La restriction de $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est injective.

2.3 Compositions d'applications

Définition.

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle alors **application composée** l'application notée $g \circ f$ de E dans G définie par:

$$\forall\, x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Propriété 7 (Propriétés de la composition)

Soient E, F, G, H des ensembles.

- Pour tout $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on a : $f \circ Id_E = f$.
- Pour tout $f \in \mathcal{F}(E, F)$, on a : $Id_F \circ f = f$.
- La composition est associative : $\forall f \in \mathcal{F}(E, F)$, $\forall g \in \mathcal{F}(F, G)$, $\forall h \in \mathcal{F}(G, H)$, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Propriété 8 (Propriétés des injections, surjections, bijections)

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
  Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
  Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
  Inversement, si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Preuve.

- On a pour tous $x, x' \in E$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) = g \circ f(x) &\Rightarrow f(x) = f(x') \text{ car } g \text{ injective} \\ &\Rightarrow x = x' \text{ car } f \text{ injective} \end{aligned}$$

  Réciproquement $\forall x, x' \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x) \\ &\Rightarrow x = x' \text{ car } g \circ f \text{ injective} \end{aligned}$$

- Pour $z \in G$ fixé, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$ puisque g est surjective. Par surjcetivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $g \circ f(x) = z$ et $g \circ f$ est surjective.

  Inversement si $g \circ f$ est surjective, alors :

$$\forall z \in G, \exists x \in E, z = g \circ f(x) = g(f(x)).$$

- Les propriétés de la bijection résultent des deux points précédents.

$\square$

Définition.

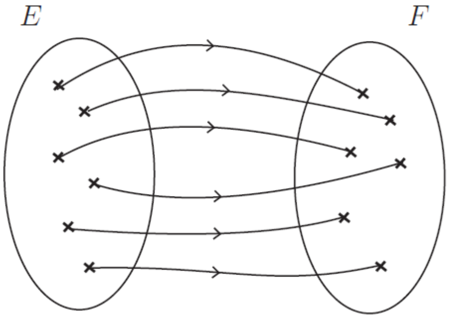
Si $f : E \to F$ est une **application bijective**, on peut définir l'application notée f^{-1}, appelée **bijection réciproque** de f et définie de F dans E par:

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \to & E \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array}$$

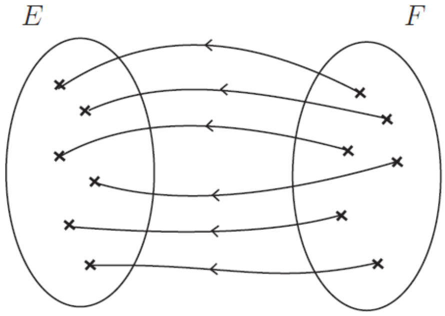
Autrement dit:

$$\forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ \ f^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ y = f(x)$$

Exemple. Voici la représentation d'une application bijective et de sa bijection réciproque:



Représentation de f



Représentation de f^{-1}

Remarque. Il résulte de la définition que :

$$\forall (x,y) \in E \times F, x = f^{-1} \circ f(x) \text{ et } y = f \circ f^{-1}(y).$$

Théorème 9 (Seconde caractérisation d'une application bijective)

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est **bijective** de E dans F si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que :

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F.$$

L'application g est alors unique et c'est la **bijection réciproque** de f.

Preuve.

- Si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ convient.
- Supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que :

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F.$$

  On déduit de la première égalité que f est injective, et de la deuxième que f est surjective. Ainsi f est bijective.

Enfin en composant $g \circ f = Id_E$ à droite par f^{-1}, on obtient que $g = f^{-1}$. $\square$

Exemple. Les fonctions carrée $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ et racine carrée $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x.$$

Théorème 10 (Composée de bijections)

- Si f est une **bijection** de E dans F et si g est une **bijection** de F dans G, alors $g \circ f$ est une **bijection** de E dans G et on a:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Si f est une **bijection** de E dans F, alors sa bijection réciproque f^{-1} est aussi bijective et :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Preuve.

- On a vu que $g \circ f$ est bijective et on montre que :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_G \text{ et } (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_F.$$

  Donc on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

- Cela résulte directement des identités $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

□

2.4 Image directe, image réciproque

Définition.

Soient f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

- L'**image directe** de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images des éléments de A par f, c'est-à-dire:

$$f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}.$$

- L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, des antécédents des éléments de B par f, c'est à dire :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

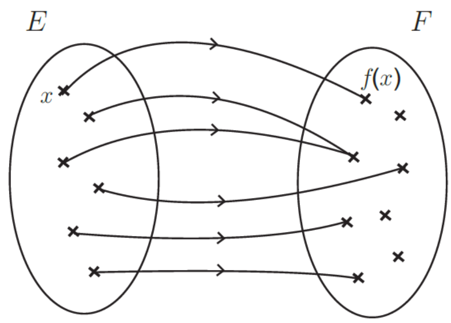
Exemples.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer les images directe et réciproque des parties suivantes:

  (1) $A = \mathbb{R}$ (2) $A = [-2, 0]$ (3) $A = [-1, 4]$ (4) $A =]-4, -2[\cup[1, 3]$

- Considérons la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'une partie A d'un ensemble E. Alors $\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\} = A$ et $\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\} = \overline{A}$. En particulier la fonction indicatrice d'un ensemble permet de le caractériser, puisque $\mathbf{1}_A$ caractérise A et réciproquement.

- Considérons l'application suivante :



  Déterminer les ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ pour tout $A \subset E$ et $B \subset F$.

ATTENTION : La notation $f^{-1}(B)$ n'a rien à voir avec la bijection réciproque. En particulier, f n'est pas forcément bijective.

Propriété 11 (Caractérisation des surjections)

Une application $f : E \to F$ est **surjective** si et seulement si $f(E) = F$.

Preuve. On montre le sens direct par double inclusion. L'implication réciproque s'obtient immédiatement en revenant aux définitions. □

3 Relation d'équivalence

Définition.

Soit E un ensemble. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E la donnée d'une partie

$$\Gamma \subset E \times E = \{(x,y)/x, y \in E\}.$$

On dira qu'un élément $x \in E$ est en relation avec un autre élément $y \in E$ si $(x,y) \in \Gamma$. On notera alors $x\mathcal{R}y$.

Exemple. Prenons $\Gamma = \{(x,x)/x \in E\}$. Alors $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$.

Définition.

Une **relation d'équivalence** sur un ensemble E est une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E qui est :

(1) **réflexive** : $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$,

(2) **symétrique** : $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

(3) **transitive** : $\forall x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

On appelle alors **classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ d'un élément** $x \in E$, notée $\overline{x}$ ou $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$, la partie de E donnée par :

$$\overline{x} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E/y\mathcal{R}x\} \in \mathcal{P}(E).$$

Les éléments de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \in \mathcal{P}(E)$ sont appelés les **représentants de la classe de** x.

Exemples.

- La relation binaire $\mathcal{R}$ définie précédement par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$, est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un élément x de E est donnée par le singleton $\{x\}$.
- On définit la relation binaire "être de la même classe" sur l'ensemble des élèves de Saint Louis. C'est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont paramétrées par le nom de chaque section (PCSI5, MPSI1,...).
- On note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On rappelle que deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{e_2} = k\overrightarrow{e_1}$ ou $\overrightarrow{e_1} = k\overrightarrow{e_1}$. La relation de colinéarité n'est pas une relation d'équivalence sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (elle est réflexive et transitive, mais elle n'est pas symétrique). Cependant la relation de colinéarité est bien une relation d'équivalence si on se restreint à l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ des vecteurs non nuls du plan. Les classes d'équivalences sont alors paramétrées par un angle $\theta \in]-\pi/2, \pi/2]$.

Propriété 12

La congruence ($\equiv [2\pi]$) est une relation d'équivalence. Pour $x \in \mathbb{R}$ la classe d'équivalence de x pour cette relation d'équivalence est $x + 2\pi\mathbb{Z}$. L'ensemble des classes d'équivalences est paramétrée par l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = x + 0 \times 2\pi$, donc $x \equiv x[2\pi]$, donc $\equiv [2\pi]$ est réflexive.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \equiv y[2\pi]$. Alors on a $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$, et $y = x - 2k\pi = x + 2(-k)\pi$ avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc $y \equiv x[2\pi]$ et $2mm[2\pi]$ est symétrique.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \equiv y[2\pi]$ et $y \equiv z[2\pi]$. Alors on a $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = y + 2k\pi$ et $y = z + 2l\pi$. Alors $x = y + 2k\pi = z + 2(k+l)\pi$, avec $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z[2\pi]$ et $\equiv [2\pi]$ est transitive.
En conclusion, la congruence modulo 2π ($\equiv [2\pi]$) est bien une relation d'équivalence.
Soit à présent $x \in \mathbb{R}$. Alors y appartient à la classe de x si et seulement si $x \equiv y[2\pi]$, soit si $y - x \in 2\pi\mathbb{Z}$, c'est à dire encore $y \in x + 2\pi\mathbb{Z}$. $\square$

Propriété 13

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

(1) $\overline{x} = \overline{y}$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.

(2) L'ensemble des classes d'équivalences constitue une partition de E, c'est à dire :

(a) pour tout $x \in E$, $\overline{x} \neq \emptyset$,

(b) pour tout $x, y \in E$ tels que $\overline{x} \neq \overline{y}$, on a : $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$,

(c) $E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}$.

Preuve.

(1) Supposons que $\overline{x} = \overline{y}$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $x \in \overline{x} = \overline{y}$. Ainsi $x \in \overline{y}$ et donc $x\mathcal{R}y$ par définition.

Réciproquement, on suppose que $x\mathcal{R}y$. Montrons que $\overline{x} = \overline{y}$. On procède par double inclusion : soit $z \in \overline{x}$, on a $z\mathcal{R}x$. Comme de plus $x\mathcal{R}y$, on obtient par transitivité de $\mathcal{R}$ que $z\mathcal{R}y$. Ainsi $z \in \overline{y}$ et on a montré que $\overline{x} \subset \overline{y}$. On montre de la même manière l'inclusion réciproque.

(2) Tout d'abord puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, $x \in \overline{x}$ pour tout $x \in E$.

En particulier, $\overline{x} \neq \emptyset$.

On obtient également que $x \in \bigcup_{x \in E} \overline{x}$ et donc que $E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}$.

Reste à montrer le deuxième point. On procède par contraposition : supposons que $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ et soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. Alors $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Par (1), on obtient donc :

$$\overline{x} = \overline{z} = \overline{y}.$$

□