Chapitre 7

Systèmes linéaires

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

1.1 définitions et premières propriétés

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

Définition.

- On appelle **équation linéaire à p inconnues** une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et où $(a_1, a_2, \ldots, a_p, b) \in \mathbb{K}^{p+1}$.
- On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** un système de la forme :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

  Pour $i \in [|1, n|], j \in [|1, p|]$, les $x_j \in \mathbb{K}$ sont les **inconnues** du système, les $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système, et les b_i forment le **second membre** du système.
- Lorsque les b_i sont tous nuls, on dit que le système $(\mathcal{S})$ est **homogène**. Dans le cas général, on appelle **système homogène associé à** $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ par des $(0, \ldots, 0)$.

Définition.

- Soit $(\mathcal{S})$ un système de n équations linéaires à p inconnues. On appelle **solution du système** $(\mathcal{S})$ tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que les n équations de $(\mathcal{S})$ soient vérifiées.
- Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit **incompatible**. Il est dit **compatible** sinon.

Interprétation géométrique.

- Dans le plan, les **droites affines** $\mathcal{D}$ sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme $((a, b) \neq 0)$:

$$ax + by = c.$$

  On retiendra qu'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, et qu'un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Dans l'espace, les **plans affines** $\mathcal{P}$ sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme $((a, b, c) \neq 0)$:

$$ax + by + cz = d.$$

  On retiendra qu'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Un système linéaire de deux équations à trois inconnues $\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array} \right.$ (avec $(a, b, c), (a', b', c') \neq 0$) peut s'interpréter géométriquement comme l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ dans l'espace. L'ensemble des solutions de ce système est alors soit vide (si les deux plans sont parallèles non confondus), soit une droite (si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont non parallèles non confondus), soit un plan (si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus). Le système est donc incompatible dans le premier cas, compatible dans les deux cas suivants.

Propriété 1 (Structure des solutions d'un système homogène)

Soit $(\mathcal{S})$ un système homogène de n équations à p inconnues. Notons E l'ensemble de ses solutions. On a :

(1) $(0,\dots,0)$ appartient à E.

(2) $\forall x=(x_1,\dots,x_p)\in E$, $\forall y=(y_1,\dots,y_p)\in E$, $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_p+y_p)\in E$.

(3) $\forall x=(x_1,\dots,x_p)\in E$, $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\cdot x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_p)\in E$.

Preuve.

(1) Pour tout $i\in[|1,n|]$, on a $a_{i,1}0+\cdots+a_{i,n}0=0$, donc $(0,\dots,0)$ est solution de $(\mathcal{S})$, et appartient à E.

(2) Soient $x=(x_1,\dots,x_p), y=(y_1,\dots,y_p)\in E$. Alors pour tout $i\in[|1,n|]$, on a $a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n}x_p=0$ et $a_{i,1}y_1+\cdots+a_{i,n}y_p=0$. D'où par somme : $a_{i,1}(x_1+y_1)+\cdots+a_{i,n}(x_p+y_p)=0$, et $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_p+y_p)\in E$.

(3) Soit $\forall x=(x_1,\dots,x_p)\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$. On a pour tout $i\in[|1,n|]$, $a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n}x_p=0$. D'où $a_{i,1}(\lambda x_1)+\cdots+a_{i,n}(\lambda x_p)=0$. Donc $\lambda\dot{x}=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_p)\in E$.

□

Propriété 2 (Structure des solutions d'un système avec second membre)

Soit $(\mathcal{S})$ un système compatible de n équations à p inconnues. Alors toute solution de $(\mathcal{S})$ s'écrit comme somme d'une solution particulière de $(\mathcal{S})$ et d'une solution du système homogène associé $(\mathcal{S}_0)$. En d'autres termes, on a

$$E=y+E_0$$

où E et E_0 sont les ensembles des solutions de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$, et $y\in\mathbb{K}^p$ une solution particulière de $(\mathcal{S})$.

Preuve. On considère le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1\\ \vdots\\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n\end{cases}$ et $y=(y_1,\dots,y_p)\in\mathbb{K}^p$ une solution particulière. Alors $(x_1,\dots,x_p)$ est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p=a_{1,1}y_1+\cdots+a_{1,p}y_p\\ \vdots\\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p=a_{n,1}y_1+\cdots+a_{n,p}y_p\end{cases} \quad\text{si et seulement si}\quad \begin{cases} a_{1,1}(x_1-y_1)+\cdots+a_{1,p}(x_p-y_p)=0\\ \vdots\\ a_{n,1}(x_1-y_1)+\cdots+a_{n,p}(x_p-y_p)=0\end{cases}$$

si et seulement si $(x_1-y_1,\dots,x_p-y_p)$ est solution du système homogène associé. □

1.2 Écriture matricielle du système

Définition.

Une **matrice de taille** $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$, appelés coefficients de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont indexés par les couples (i,j) où i est l'indice de ligne, et j l'indice de colonne.

Définition.

Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire à n équations et p inconnues introduit plus haut.

- On appelle **matrice des coefficients** de $(\mathcal{S})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

à n lignes et p colonnes.

- On appelle **colonne des seconds membres** de $(\mathcal{S})$ la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- On définit la **matrice augmentée** associée au système $(\mathcal{S})$ par :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right).$$

Exemple. Considérons le système $\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 3x-2y+5z=4 \end{cases}$. Sa matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \end{array} \right)$.

1.3 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice

Définition.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système (ou d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul ce que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$;
- Ajout de $\beta \dot{L}_j$ à L_i avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \beta\lambda L_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$.

Exemple.

- Dans le système $\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 3x-2y+5z=4 \end{cases}$, le résultat de $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ est $\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 7y+11z=10 \end{cases}$.
- Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, le résultat de $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. On précisera systématiquement et à chaque étape les opérations élémentaires qu'on a effectué pour passé d'un système linéaire à un autre.

Propriété 3

Les opérations élémentaires sont réversible. En particulier, si $(\mathcal{S}')$ se déduit de $(\mathcal{S})$ par une suite finie d'opérations élémentaires, alors $(\mathcal{S})$ se déduit de $(\mathcal{S}')$ par une suite finie d'opérations élémentaires.

Preuve. Quitte à faire une récurrence sur le nombre d'opérations élémentaires, il suffit de prouver la propriété lorsque l'on passe de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ par une seule opération élémentaire. On a alors les trois cas suivants :

- Si l'on passe de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$, on passe de $(\mathcal{S}')$ à $(\mathcal{S})$ en effectuant $L_j \leftrightarrow L_i$.

- Si l'on passe de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ en effectuant $L_i \leftrightarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\beta \in \mathbb{K}$, on passe de $(\mathcal{S}')$ à $(\mathcal{S})$ en effectuant $L_i \leftrightarrow L_i - \beta L_j$.
- Si l'on passe de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ en effectuant $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on passe de $(\mathcal{S}')$ à $(\mathcal{S})$ en effectuant $L_i \leftrightarrow \frac{1}{\lambda} L_i$.

□

Définition.

- On dit que deux systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On le note $\mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{S}'$.
- On dit que deux matrices A et A' sont équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On le note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Propriété 4

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Preuve. Quitte à faire une récurrence sur le nombre d'opérations élémentaires, il suffit de prouver la propriété lorsque l'on passe de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ par une seule opération élémentaire. Notons E l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ et E' celui de $\mathcal{S}'$.

$\subset$ On a clairement $E \subset E'$.

$\supset$ D'après la proposition précédente, on peut passer de $(\mathcal{S}')$ à $(\mathcal{S})$ par une opération élémentaire. Donc on a également $E' \subset E$.

□

Remarque. Grâce à des opérations élémentaires sur les lignes du système $(\mathcal{S})$, on va se ramener à un système $(\mathcal{S}')$ plus simple à résoudre.

Propriété 5

Si l'on passe d'un système $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathcal{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}$. Ainsi,

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow (\mathcal{S}') \text{ si et seulement si } (A|B) \underset{L}{\sim} (A'|B').$$

Remarque. Ceci justifie la présentation matricielle pour la résolution d'un système linéaire (ce qui nous épargne l'écriture des inconnues du système).

2 Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

2.1 Matrices et systèmes échelonnés par lignes

Définition.

- Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite (strictement) du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

  On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

- Une matrice échelonnée par lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle, ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.
- Un système est dit **échelonné par lignes** (resp. **échelonné réduit par lignes**) si sa matrice des coefficients l'est.

Forme générale d'une matrice échelonnée par lignes.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\oplus$ sont des réels non nuls correspondant aux pivots et $*$ sont des réels.
E est échelonnée par ligne et R est échelonnée réduite par ligne.

Exemple.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes. Ses pivots sont 1, 2 et 7. Elle n'est pas échelonnée réduite.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée par lignes.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes.

2.2 Algorithme de Gauss-Jordan

Propriété 6

Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite par lignes (qui est de plus unique).

Preuve. L'unicité est admise. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$: si A est une matrice à n lignes et p colonnes, A est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite.

• Soit A une matrice à n lignes et 1 colonnes. Alors A est de la forme $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Si A est une colonne nulle, il n'y a rien à faire. On suppose donc avoir $k \in [|1, n|]$ tel que $a_k \neq 0$. On effectue alors $L_k \leftrightarrow L_1$ pour obtenir $A' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$ avec $a'_1 \neq 0$. On effectue ensuite $L_1 \leftarrow \frac{1}{a'_1} L_1$ pour obtenir $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a''_2 \\ \vdots \\ a''_n \end{pmatrix}$. Enfin on effectue $L_k \leftarrow L_k - a''_k L_1$ pour $k \in [|2, n|]$ et on obtient $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, échelonnée réduite par lignes. Ainsi A est équivalente par lignes à une matrice échelonnée en lignes et on a $\mathcal{P}(1)$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(p)$ et soit A une matrice à n lignes et $p+1$ colonnes.

On note M la matrice obtenue à partir de A en supprimant la dernière colonne. Par hypothèse de récurrence, on a une suite d'opérations élémentaires qui transforme M en une matrice échelonnée réduite par lignes. On effectue cette suite d'opérations élémentaires à A pour obtenir $A_1 = (N \ \ C)$, avec N une matrice à n lignes et p colonnes échelonnée réduite par lignes, C une colonne (à n lignes) de la forme $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Notons i_0 l'indice de ligne du dernier pivot de N.

- Si $i_0 = n$, A_1 est échelonnée réduite par lignes.
- Supposons $i_0 < n$.
  - Si pour tout $k \in [|i_0+1, n|]$, $c_k = 0$, A_1 est échelonnée réduite par lignes.
  - Supposons qu'il existe $k \in [|i_0+1, n|]$ tel que $c_k \neq 0$. On effectue $L_{i_0+1} \leftrightarrow L_k$ sur A pour le ramener en (i_0+1)-ième position (ce qui ne change pas N car toutes ses lignes au-delà de la i_0-ème sont nulles). On effectue $L_{i_0+1} \leftarrow \frac{1}{c_{i_0+1}} L_{i_0+1}$ pour transformer le coefficient en 1 (ce qui ne change pas N comme plus haut) : la dernière colonne est alors de la forme $C' = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{i_0} \\ 1 \\ C_{i_0+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Enfin, on effectue $L_i \leftarrow L_i - c'_i L_{i_0+1}$ pour $k \neq (j+1)$. On obtient ainsi une matrice A'' de la forme $(N|C'')$ avec $C'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, matrice échelonnée réduite par lignes. On a donc montré $\mathcal{P}(p+1)$.

En conclusion, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$. □

▶ ***Algorithme du pivot de Gauss-Jordan.***
Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[|1,n|]\times[|1,p|]}$, on commence avec $i = 1$ et $j = 1$.
Tant que ($i \leq n$ et $j \leq p$) faire :

▶ *On regarde dans la j-ème colonne s'il y a un coefficient non nul entre la i-ème et la dernière ligne.*
Si oui, on note k l'indice de cette ligne, et on effectue les opérations élémentaires suivantes :

- *On effectue $L_i \leftrightarrow L_k$,*
- *On effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{k,j}} L_i$ (pour avoir un coefficient $= 1$)*
- *On effectue $L_l \leftarrow L_l - a_{l,j} L_i$ pour tout $1 \leq k \leq n$, $k \neq i$ (pour annuler tous les coefficients de la colonne sauf le pivot).*
- *On augmente i de 1.*

Sinon, ne rien faire

▶ *On augmente j de 1.*

Exemple.

- Appliquons l'algorithme à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  On effectue

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Appliquons l'algorithme à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Résolution d'un système linéaire

En appliquant la méthode de Gausse-Jordan sur la matrice augmentée associée au système initiale $(\mathcal{S})$, on se ramène donc à un système équivalent $(\mathcal{S}')$ dont la matrice augmentée $(A'|B')$ est une matrice échelonnée par lignes. Sa résolution se fait alors bien plus facilement comme nous allons le voir dans ce paragraphe.

Définition.

Soit $(\mathcal{S})$ un système dont la matrice augmentée $(A'|B')$ est sous forme échelonnée par lignes.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{1,j_1} & \cdots & & & & & & b'_1 \\ 0 & & a'_{2,j_2} & \cdots & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & & & a'_{r,j_r} & \cdots & \\ & & & & & 0 & & b'_{r+1} \\ 0 & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

- On appelle **inconnue principale** toute inconnue associée à un pivot de A. Toute autre inconnue est appelée **inconnue secondaire** ou **inconnue paramètre**.
- r s'appelle le **rang du système** $(\mathcal{S})$. C'est le nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.

Exemple. La matrice augmentée associée au système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 7 \\ & & & & -3z & = & -2 \end{array} \right.$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right)$
Cette dernière est échelonnée par lignes. On peut donc dire que le rang du système est 2, que x et z sont des inconnues principales et y est une inconnue secondaire.

Propriété 7

- Si $\mathcal{S}$ est de rang r, on a $r \leq n$ et $r \leq p$.
- Le nombre de paramètres (ou inconnues secondaires) est égal à $p - r$, où p est le nombre d'inconnues et r est le rang du système.

Propriété 8

Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire de n équations à p inconnues et de rang r. Notons $(A'|B')$ la réduite échelonnée par ligne associée à la matrice augmentée de $\mathcal{S}$.
Trois cas sont possibles :

- Si la colonne B contient des pivots : le système est incompatible, et il ne possède aucune solution.
- Sinon :
  - si $r = p$ (rang = nombre d'inconnues) :
$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{1,1}=1 & 0 & & & b'_1 \\ 0 & a'_{2,2}=1 & \cdots & & \\ & 0 & & & \\ & & & a'_{p,p}=1 & b'_p \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right)$$
le système possède alors une unique solution.
  - si $r < p$:
$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{1,j_1}=1 & \cdots & 0 & & 0 & b'_1 \\ 0 & & a'_{2,j_2}=1 & \cdots & & \\ & & 0 & & 0 & \\ & & & & a'_{r,j_r}=1 \quad \cdots & b'_r \\ & & & & 0 \quad\quad 0 & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 \quad\quad 0 & 0 \end{array}\right)$$
le système possède une infinité de solutions paramétrées à l'aide des $p-r$ inconnues secondaires.

Cas particulier : Si le système a n équations, n inconnues et est de rang n alors il est dit de **Cramer**. Par la proposition précédente, il possède une unique solution. Ainsi, un système est de Cramer si et seulement si la réduite échelonnée par lignes $(A|B)$ associée à la matrice augmentée de $\mathcal{S}$ est de la forme :

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 & b'_p \end{array}\right)$$

Preuve.

- Supposons que B' contiennent des pivots, il existe donc une ligne de $(A'|B')$ du type $0 = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Le système n'admet donc aucune solution.
- Sinon
  - Supposons que $r = p$. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est donc de la forme $(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & b'_p \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$. Ainsi $\mathcal{S}$ est équivalent à un système de la forme $\begin{cases} x_1 = b'_1 \\ \vdots \\ x_p = b'_p \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$. Le système est compatible et admet une unique solution.

– Supposons que $r < p$. Quitte à échanger des colonnes, la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est de la forme $(A'|B') = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * & b'_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi le système est donc équivalent à un système de la forme $\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots + a'_{1,p}x_p \\ \vdots \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{n,p}x_p \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$. Le système admet donc une infinité de solutions (toutes les valeurs possibles pour $x_{r+1}, \dots, x_p$ donnant des solutions.

□

Exemples.

1. Notons $\mathcal{S}_\infty$ le système $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -y + z = 3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à sa matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 13 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right)$$

donc le système équivaut à $\begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{13}{4} \end{cases}$, et admet une unique solution, $(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{13}{4})$. Géométriquement, on obtient que les trois plans d'équations respectives les lignes du système s'intersectent en un unique point.

2. Notons $\mathcal{S}_\in$ le système $\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à sa matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow \frac{3}{17}L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donc le système est incompatible. Il n'a donc pas de solutions. Géométriquement, on obtient que les trois plans d'équations respectives les lignes du système n'ont pas d'intersection commune.

3. Notons $\mathcal{S}_\ni$ le système $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à sa matrice

augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow -L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc le système équivaut à $\begin{cases} x + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3} \\ y + \frac{4}{3}z = \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}$, et admet une infinité de solutions : $S = \Big\{ (\frac{-1-z}{3}, \frac{2-4z}{3}, z),\ z \in \mathbb{R} \Big\}$. On peut réécrire cet ensemble de solutions de la manière suivante :

$$S = \Big\{ (-1/3, 2/3, 0) + z(-1/3, -4/3, 1),\ z \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Cet ensemble correspond à la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par le point $(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ et dirigée par le vecteur $(-1/3, -4/3, 1)$. Géométriquement, on obtient que l'intersection des trois plans d'équations respectives les lignes du système est la droite $\mathcal{D}$.