Chapitre 4

Nombres complexes et trigonométrie

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Définition

Définition.

On appelle ensemble des **nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres de la forme $a+ib$ où a et b sont des réels et où i un élément qui vérifie $i^2=-1$.
Dans cet ensemble, on définit une loi $+$ et une loi $\times$ par :

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b') \quad \text{et} \quad (a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

Remarque. $\mathbb{R}$ peut être vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en identifiant $x\in\mathbb{R}$ avec le nombre complexe $x+i0$. En particulier, les lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{C}$ prolongent l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{R}$.

Propriété 1

Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=a+ib$.

Preuve. En effet si (a,b) et (a',b') sont tels que $z=a+ib=a'+ib'$, alors $(a-a')=i(b'-b)$. En élevant au carré, on obtient $(a-a')^2=-(b'-b)^2$, et donc $a=a'$ et $b=b'$. □

Définition.

Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$. On dit que z a pour **écriture algébrique** $a+ib$ et on définit:

- a sa **partie réelle** qu'on notera $Re(z)$,
- b sa **partie imaginaire** qu'on notera $Im(z)$.

Si $a=0$, on dira que $z=ib$ est imaginaire pure. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires pures.

Propriété 2

(1) Soient $z,z'\in\mathbb{C}$. Alors: $z=z' \Leftrightarrow Re(z)=Re(z')$ et $Im(z)=Im(z')$.

(2) L'application $f:(a,b)\mapsto z=a+ib$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.

Interprétation géométrique Cette bijection nous permet d'identifier le **plan complexe** au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$:

On associe à $z=a+ib\in\mathbb{C}$ un unique point M du plan de coordonnées (a,b), et un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$. On dit que z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\vec{v}$, et on écrit $M(z)$ et $\vec{v}(z)$.
On notera que, pour $A(z)$ et $B(z')$ deux points du plan, l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z'-z$.

Exemple. Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$ tel que $a^2+b^2=1$. Montrer que si $z\neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z}$ est un nombre imaginaire pur.

1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition.

Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z}$ tel que $\overline{z}=a-ib$.

Remarque. Dans le plan complexe, les points images $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont donc symétriques par rapport à l'axe (Ox).

Propriété 3

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors:

$$(1)\ \overline{\overline{z}} = z \quad (2)\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad (3)\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

En particulier, si $z' \neq 0$, alors $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$.

Preuve. On le montre par un calcul direct pour le produit. Le quotient s'en déduit alors directement. □

Propriété 4

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors:

$$(1)\ Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad (2)\ Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \quad (3)\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\ \overline{z} = z \quad (4)\ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow\ \overline{z} = -z.$$

Exemple. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

1. Montrer que $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. En déduire que si $z \neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

1.3 Module d'un nombre complexe

Définition.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque. Le module prolonge naturellement la notation de valeur, c'est à dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

Propriété 5

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors:

(1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(2) $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$;

(3) $|\overline{z}| = |z|$;

(4) $|zz'| = |z||z'|$, et si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Preuve.

□

Propriété 6

Pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$. Ainsi si $z \neq 0$, $y = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ vérifie $y \times z = z \times y = 1$. On l'appelle inverse de z.

Preuve. On écrit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Le reste s'en déduit aisément. □

Propriété 7 (inégalité triangulaire)

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
En particulier, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_2 = 0$ ou $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z_1 = \alpha z_2$, c'est à dire que les points $O, M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont alignés sur une même demi-droite d'origine O.

Preuve. Démontrons la première inégalité triangulaire. On a, avec la proposition précédente,

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|\Re(z_1\overline{z_2})| + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1| \times |\overline{z_2}| + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \times |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, comme la fonction racine carrée est croissante, on obtient $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Pour la deuxième inégalité triangulaire, il faut montrer que $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. L'inégalité de gauche équivaut à $|z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|$ c'est-à-dire $|z_1 + (z_2 - z_1)| \leq |z_1| + |z_2 - z_1|$. Cette inégalité est vraie par la proposition précédente. L'inégalité de droite équivaut à $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ c'est-è-dire $|z_2 + (z_1 - z_2)| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$, qui est aussi vraie par la proposition précédente. On a donc le résultat souhaité.

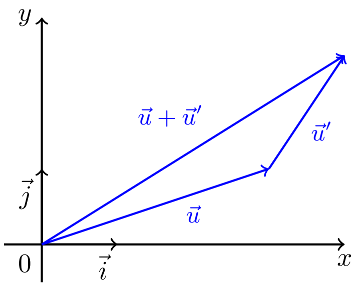
Supposons avoir égalité : $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. On a donc égalité partout dans les inégalités précédente, et $Re(z_1\overline{z_2}) = |Re(z_1\overline{z_2})| = |z_1\overline{z_2}|$. Ainsi, $Re(z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}_+$ et $Re(z_1\overline{z_2})^2 = |z_1\overline{z_2}|^2 = Re(z_1\overline{z_2})^2 + Im(z_1\overline{z_2})^2$ donc $Im(z_1\overline{z_2}) = 0$. Finalement, le nombre $z_1\overline{z_2}$ est donc un réel positif α et son conjugué $z_2\overline{z_1}$ aussi. Si $z_1 \neq 0$, alors $z_2 = z_2\frac{z_1\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{\alpha}{|z_1|^2}z_1$, donc en posant $\lambda = \frac{\alpha}{|z_1|^2} \in \mathbb{R}_+$, $z_2 = \lambda z_1$.

Réciproquement, si $z_1 = 0$ ou si $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on vérifie facilement qu'on a égalité. $\square$

Interprétation géométrique du module.

Dans le plan complexe, si on note $M(z)$ ou $\vec{v}(z)$, alors $|z|$ représente la distance OM ou la norme du vecteur $\vec{v}$. Si $M'(z')$ désigne un autre point, $|z' - z|$ représentera la distance MM'.

L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ alors : $||\vec{u} + \vec{u}'|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{u}'||$.



Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond au cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires de même sens.

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre ω et de rayon r.
- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - \omega| < r$ (resp. $|z - \omega| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre ω et de rayon r.
  disque ouvert (c'est à dire ne contenant pas les points du cercle) contrairement au disque fermé.

2 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

2.1 Nombres complexes de module 1

Définition.

On appelle **cercle trigonométrique** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}.$$

Remarque. $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.

Définition.

Si θ est un réel, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Exemples.

- $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Propriété 8

(1) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ appartient à $\mathbb{U}$.

(2) Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$

Ainsi $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \ ; \theta \in \mathbb{R}\}$.

Remarque. Le réel θ est de plus unique si on impose $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in [-\pi, \pi[$.

Preuve.

(1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors $|e^{i\theta}|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Ainsi $|e^{i\theta}| = 1$ et $\{e^{i\theta} \ ; \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$.

(2) Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}$. On écrit z sous la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme $|z| = 1$, $a^2 + b^2 = 1$. On a alors $a^2 \leq 1$, donc $a \in [-1, 1]$. Or, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe (un unique) $t \in [0, \pi]$ tel que $x = cos(t)$ ($t = \arccos(x)$).

On en déduit que $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$ donc $b = \pm \sin t$. Comme $t \in [0, \pi]$, $\sin t \geq 0$. Si $b \geq 0$, $b = \sin t$, et on pose $\theta = t$, de sorte que $z = \cos t + i \sin t = e^{it}$. Sinon on pose $\theta = -t$ et $z = a + ib = \cos t - i \sin t = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$. On a donc $\mathbb{U} \subset \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \ ; \theta \in \mathbb{R}\}$. □

Propriété 9

(1) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

(2) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$

(4) $\forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$, $\big(e^{i\theta} = e^{i\phi} \iff \theta \equiv \phi \ [2\pi]\big)$.

Preuve.

(1) Pour tout réel θ, on a : $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos -\theta + i\sin -\theta = e^{-i\theta}$.

(2) Considérons deux réels θ et θ'. On a:

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

(3) On en déduit que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$, donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

(4) L'égalité $e^{i\theta} = e^{i\phi}$ équivaut è $e^{i(\theta-\phi)} = 1$. Celle-ci a lieu si et seulement si $\cos(\theta-\phi) = 1$ et $\sin(\theta-\phi) = 0$, ce qui revient è dire que $\theta - \phi$ est un multiple entier en 2π.

□

Exemple. Exprimer à l'aide de radicaux $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$ en notant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

On a d'après la remarque suggérée :

$$\exp(i\pi/12) = \exp(i\pi/3 - i\pi/4) = \exp(i\pi/3)\exp(-i\pi/4).$$

Il en résulte que :

$$\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Par identification, on en déduit :

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Propriété 10 (Formules d'Euler)

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve. Ces formules sont évidentes à partir de la définition de $e^{i\theta}$. □

Propriété 11 (Formule de Moivre)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou encore par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Preuve. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$".
On a $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta}$ (par hypothèse de récurrence) $= e^{i(n+1)\theta}$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $e^{in\theta} = \dfrac{1}{e^{-in\theta}} = \dfrac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = (e^{i\theta})^n$. □

2.2 Application à la trigonométrie

2.2.1 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus

► *Pour linéariser une expression trigonométrique* $\cos^k x \sin^l x$ *(en combinaison linéaire de termes en* $\cos(\alpha x)$ *ou* $\sin(\beta x)$*), on procède comme suit :*

(1) On utilise les formules d'Euler pour changer $\cos x$ *et* $\sin x$ *en termes avec* e^{ix} *et* e^{-ix}.

(2) On développe complètement, avec le binôme de Newton.

(3) On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ *ou* $\sin(\beta x)$.

Exemples. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

2.2.2 Factorisation par l'angle de l'arc moitié

▶ *Pour factoriser une expression du type* $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$*, on pensera à factoriser par l'angle moitié, c'est à dire par* $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$) *et à utiliser ensuite la formule d'Euler.*

Exemples. Factoriser les expressions suivantes :

- pour $t\in\mathbb{R}$, $1+e^{it}$;
- pour $p,q\in\mathbb{R}$, $\cos(p)+\cos(q)$.

2.2.3 Calculs de sommes de cosinus et sinus

▶ *Les nombres complexes sont utiles pour le calcul de sommes de cosinus on sinus car mieux vaut considérer des sommes avec* $\exp(i\theta)$ *qu'avec* $\cos(\theta)$ *ou* $\sin(\theta)$ *isolément.*

Exemple. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$

Pour $x\in\mathbb{R}$ non congru à 0 modulo 2π, $e^{ix}\neq 1$ donc on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)&=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k\quad\text{(par la formule de Moivre)}\\&=\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{ix(n+1)/2}(e^{-ix(n+1)/2}-e^{ix(n+1)/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}\\&=e^{ixn/2}\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{ixn/2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

D'où $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=Re(e^{ixn/2})\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\cos(xn/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=Im(e^{ixn/2})\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\sin(xn/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

2.2.4 Polynômes de Tchebichev

▶ *Pour transformer cos(nx) ou sin(nx) en un polynôme en* cos *ou en* sin, *on procède comme suit :*

(1) On écrit $\cos(nx)=Re\left((e^{ix})^n\right)=Re\left((\cos x+i\sin x)^n\right)$ *grâce à la formule de Moivre.*

(2) On développe avec le binôme de Newton.

(3) On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exemple. Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, on a On a

$$\begin{aligned}\cos(6x)&=Re(e^{6ix})\\&=Re((cosx+i\sin x)^6)\\&=Re(\cos^6(x)+6i\cos^5x\sin(x)-15\cos^4(x)\sin^2(x)-20i\cos^3(x)\sin^3(x)+15\cos^2(x)\sin^4(x)\\&\quad+6i\cos(x)\sin^5(x)-\sin^6(x))\\&=\cos^6(x)-15\cos^4(x)(1-\cos^2(x))+15\cos^2(x)(1-\cos^2(x))^2-(1-\cos^2(x))^3\\&=\cos^6(x)-15\cos^4(x)+15\cos^6(x)+15\cos^2(x)-30\cos^4(x)+15\cos^6(x)\\&\quad-1+3\cos^2(x)-3\cos^4(x)+\cos^6(x)\\&=32\cos^6(x)-48\cos^4(x)+18\cos^2(x)-1\end{aligned}$$

3 Forme trigonométrique, argument

Propriété 12 (Forme polaire ou trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$. $r = |z|$ et θ est unique modulo 2π.

Preuve. *Existence :* Comme $z \neq 0$, on peut poser $z_1 = \frac{z}{|z|}$. Comme $|z_1| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = e^{i\theta}$. Ainsi $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$.
Unicité : Si on a $(r, r', \theta, \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$, alors $r = |z| = r'$, puis $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ donc $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$. □

Définition.

On appelle **argument** de $z \in \mathbb{C}^*$ tout réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. On le note $\arg(z)$.

Remarques.

- Le nombre θ n'est pas unique.
- Si θ_0 est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$, tous les arguments de z sont de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si on impose $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in [-\pi, \pi[$, θ est unique.
- $z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$

Interprétation géométrique. Dans le plan complexe, si on note $M(z)$, alors $Arg(z)$ représente une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
Et de la même façon, si $M'(z')$ désigne un autre point, $Arg(z' - z)$ représentera une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{MM'})$.

Lemme. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1} \qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Propriété 13

(1) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\overline{z}) \equiv \arg(z) \ [2\pi]$;

(2) Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$;

(3) Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$;

(4) Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ [2\pi]$;

(5) Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \ [2\pi]$.

Propriété 14

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a:

(1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Arg(z) = 0 \ [\pi]$ (2) $z \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow Arg(z) = 0 \ [2\pi]$ (3) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$

Exemples. ♦ Écrire les formes trigonométriques des nombres complexes suivants :

- $z = ae^{i\theta} = \begin{cases} ae^{i\theta} \text{ si } a > 0 \\ (-a)e^{i(\theta+\pi)} \text{ si } a < 0 \end{cases}$
- Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, $z = 1 + e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$ avec $\cos(\theta/2) > 0$.
- Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, $z = 1 - e^{i\theta} = 2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2} = 2\sin(\theta/2)e^{i(\theta+\pi)/2}$ avec $\sin(\theta/2) > 0$.

♦ Calculer $(1+i)^{1515}$. ($\frac{1515\pi}{4} = 378\pi + \frac{3\pi}{4}$)

Propriété 15

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, il existe $(A, \omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a\cos t + b\sin t = A\cos(t - \omega)$.

Preuve. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$a\cos t + b\sin t = a\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + b\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{a - ib}{2}e^{it} + \frac{a + ib}{2}e^{-it}.$$

Notons $z = \frac{a+ib}{2} \neq 0$ et $z = re^{i\omega}$ sa forme polaire (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\omega \in \mathbb{R}$), alors

$$a\cos(t) + b\sin t = \overline{z}e^{it} + ze^{-it} = re^{-i\omega}e^{it} + re^{i\omega}e^{-it} = r(e^{i(t-\omega)} + e^{-i(t-\omega)}) = 2r\cos(t - \omega)$$

et on a le résultat voulu en posant $A = 2r$. □

Remarque. Une telle fonction $t \mapsto a\cos t + b\sin t$ est appelée signal sinusoïdal. Physiquement, le réel A représente son amplitude, et ω sa phase. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est le module de $a + ib$ et la phase son argument.

4 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

4.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition.

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Propriété 16

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Preuve. On écrit z sous la forme $re^{i\theta}$ et on cherche une racine carrée u de z sous la forme $se^{i\beta}$, avec $(r, s) \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\beta, \theta) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $u^2 = z$ si et seulement si $s^2e^{2i\beta} = re^{i\theta}$ si et seulement si $\left(s^2 = r \text{ et } 2\beta \equiv \theta \ [2\pi]\right)$ si et seulement si $\left(s = \sqrt{r} \text{ et } \beta \equiv \frac{\theta}{2} \ [\pi]\right)$ si et seulement si $\left(u = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \text{ ou } u = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}\right)$. On a donc le résultat voulu. □

Remarque. La notation $\sqrt{\ }$ est réservée aux nombres réels positifs.

► *Pour déterminer l'écriture algébrique des racines carrées d'un nombre complexe, on procèdera comme suit : on cherche les racines de $z = a + ib$ sous la forme $u = x + iy$. L'équation $u^2 = z$ donne le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ en identifiant parties réelle et imaginaire. On pensera systématiquement à ajoute l'équation $|u|^2 = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour trouver les valeurs de x^2 et y^2. On prend ensuite les racines carrées, en faisant attention aux signes relatifs de x et y, donné par l'équation $2xy = b$.*

Exemples. Déterminer les racines carrées de $1 + i$.

On les cherche sous la forme $u = x+iy$. On a donc $u^2 = 1+i$. On a $x^2-y^2 = 1$ et $2xy = 1$. On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |u|^2 = |1 + i| = \sqrt{2}$ pour avoir le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$ donc les solutions sont $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Comme $2xy = 1 > 0$, on a x et y de même signe, finalement les racines carrées de $1 + i$ sont

$$\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right).$$

4.2 Équation du second degré à coefficients complexes

Propriété 17 (Résolution de l'équation du second degré)

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation et on note Δ le nombre $b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution, appelée racine double, $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions, $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

Preuve. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ (mise sous forme canonique).
Ainsi $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$ si et seulement si $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.
Si $\Delta = 0$, l'équation équivaut à $z + \frac{b}{2a} = 0$ i.e. $z = -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta \neq 0$, notant δ une racine de Δ, l'équation équivaut à $z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\delta}{2a}$ i.e. $z = \frac{-b\pm\delta}{2a}$. □

Remarque. Dans le cas particulier où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on retiendra que les solutions z_1 et z_2 ne sont pas seulement distinctes: ce sont des racines complexes conjuguées.

Exemples. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

Propriété 18 (Relations coefficients racines)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$. Alors:

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons que z_1 et z_2 sont les deux solutions de $az^2 + bz + c = 0$.
Notons δ une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ (quitte à changer δ en $-\delta$).
Ainsi $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \frac{(-b+\delta)(-b-\delta)}{4a^2} = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que z_1, z_2 vérifient $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \frac{c}{a}$.
On a alors : $a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2 = az^2 + bz + c$. Ainsi, z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

□

► *Pour résoudre un système de la forme* $\begin{cases} xy = \alpha \\ x + y = \beta \end{cases}$, *on introduit donc l'équation* $z^2 - \beta z + \alpha$. (x, y) *est alors le couple de solutions de cette équation du second degré (écrit dans un ordre ou l'autre).*

Exemple. Trouver deux nombres complexes de somme 2 et de produit i.

5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

5.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Théorème 19

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, qui sont les $\xi_k = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in [|0, n-1|]$. Ainsi :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} / k \in [|0, n-1|]\}.$$

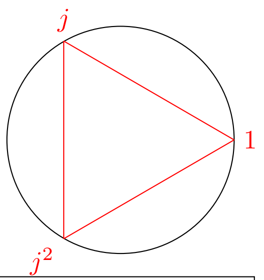
Preuve. On cherche une racine n-ième de l'unité z sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $z^n = 1$ si et seulement si $r^n e^{in\theta} = 1$ (par la formule de Moivre) si et seulement si ($r^n = 1$ et $n\theta \equiv 0[2\pi]$), si et seulement si $r = 1$ et $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$. Ainsi z est de la forme $e^{2ik\pi/n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démontrons qu'il y a n racines n-ièmes. Pour cela, on étudie le cas d'égalité :
$e^{2ik\pi/n} = e^{2ik'\pi/n}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$) si et seulement si $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n}$ $[2\pi]$, soit encore si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{k}{n} = \frac{k'}{n} + l$. Ceci est donc équivalent à l'existence de $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k = k' + ln$, soit en d'autres termes $k \equiv k'$ $[n]$.
Ainsi, il y a n racines de l'unité distinctes. Pour avoir une énumération de $\mathbb{U}_n$ (tous ses éléments, mais sans répétition) il faut prendre des valeurs de k telles que $0 \leq k < n$.
Ainsi $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}$; $k \in [|0, n-1|]\}$. □

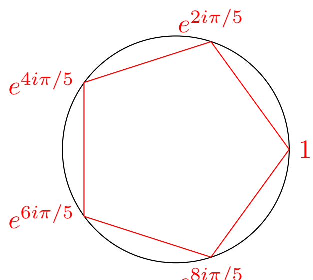
Exemple.

- Les racines carrées de l'unité sont ± 1.
- Si $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Interprétation géométrique Soit $n \geq 3$. Pour tout $k \in [0..n-1]$, posons $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors les points $M_k(\xi_k)$ définissent les sommets d'un polygone régulier à n côtés.



Représentation de $\mathbb{U}_3$



Représentation de $\mathbb{U}_5$

Exercice. Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Tout d'abord, i n'est pas solution de l'équation, et on peut donc supposer dans la suite que $z \neq i$. On a

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/n}(z-i), k \in [|0, n-1|]$$
$$\Leftrightarrow z(1 - e^{2ik\pi/n}) = -i(e^{2ik\pi/n} + 1), k \in [|0, n-1|].$$

Pour $k = 0$, l'équation devient : $0 = -2i$ qui est impossible. On a donc $k \in [|0, n-1|]$ et :

$$z = -i\frac{e^{2ik\pi/n} + 1}{1 - e^{2ik\pi/n}} = -i\frac{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n})}{e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n})} = -i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)} = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Les solutions de l'équation sont donc $\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [|0, n-1|]$.

Propriété 20

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) Si on note $\xi_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, les racines n-ièmes de l'unité sont $1, \xi_1, \xi_1^2, \cdots, \xi_1^{n-1}$.

(2) Si ξ est une racine n-ième de l'unité différente de 1, on a: $1 + \xi + \xi^2 + ... + \xi^{n-1} = 0$

(3) La somme des racines n-ième de l'unité est égale è 0.

Preuve.

(2) $1 + \xi + \xi^2 + ... + \xi^{n-1}$ constitue la somme des termes d'une progression géométrique.

Ainsi, $1 + \xi + \xi^2 + ... + \xi^{n-1} = \dfrac{1-\xi^n}{1-\xi} = 0$ car ξ est une racine n-ième de l'unité.

(3) Découle directement des points (1) et (2).

□

5.2 Racines n-ièmes d'un complexe

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **racine n-ième de** Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Propriété 21

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, alors Z admet exactement n racines n-ièmes.
Si z_0 est une racine n-ième de Z, les racines n-ièmes de Z sont les $z_0 e^{2ik\pi/n}$, $k \in [|0, n-1|]$.

Preuve. On écrit $Z = re^{i\theta}$ et on cherche une racine n-ième z de Z sous la forme $se^{i\alpha}$. Alors, on a :

$$z^n = Z \underset{\text{formule de Moivre}}{\Longleftrightarrow} s^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} \Longleftrightarrow \begin{cases} s^n = r \\ n\alpha \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{n} \ [\frac{2\pi}{n}] \end{cases}.$$

Ainsi, $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}$ est donc une racine n-ième de Z.
Par suite, $z^n = Z$ si et seulement si $z^n = z_0^n$, si et seulement si $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ si et seulement si $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$, si et seulement si $z = z_0 e^{2ik\pi/n}$, $k \in [|0, n-1|]$. Z admet donc n racines n-ièmes. □

► *Pour trouver toutes les racines n-ièmes de a, il suffit d'en exhiber une et de la multiplier par toutes les racines n-ièmes de l'unité. Comme dans la preuve, pour trouver une racine n-ième de Z particulière, on le met sous forme polaire.*

Exemple. Résoudre $z^8 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

On a $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\pi/12}$. Une racine huitième de ce nombre est donnée par $z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}} e^{-i\pi/96}$. On obtient alors toutes les racines 8-ièmes de $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ en multipliant z_0 par les racines 8-ièmes de l'unité :

$$\mathcal{S} = \{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}} e^{i(2k\pi/8-\pi/96)} / k \in [|0, 7|]\}.$$

6 Exponentielle complexe

Définition.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** par:

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)).$$

Propriété 22

(1) On a $|\exp(z)| = e^{Re(z)}$ et $Im(z)$ est un argument de $\exp(z)$.

(2) Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.

(3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

(4) Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z'$ est de la forme $2i\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve.

(1) Direct à partir de la définition

(2) Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :
$e^{z+z'} = e^{Re(z+z')}e^{iIm(z+z')} = e^{Re(z)+Re(z')}e^{i(Im(z)+Im(z'))} = e^{Re(z)}e^{Re(z')}e^{iIm(z)}e^{iIm(z')} = e^{Re(z)+iIm(z)}e^{Re(z')+iIm(z')} = e^z e^{z'}$

(3) $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$ d'après le résultat précédent.

(4) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $e^z = e^{z'}$ on a alors :
- $|e^z| = |e^{z'}| \iff e^{Re(z)} = e^{Re(z')} \iff Re(z) = Re(z')$
- $\arg e^z \equiv \arg e^{z'}\ [2\pi] \iff Im(z) \equiv Im(z')\ [2\pi]$.
  Ainsi, $z - z' = i(Im(z) - Im(z')) \in 2i\pi\mathbb{Z}$

Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z - z' = 2k\pi i$ alors, $e^z = e^{z'+2k\pi i} = e^{z'}e^{2k\pi i} = e^{z'}$

□

7 Nombres complexes et géométrie plane

7.1 Alignement et orthogonalité

Propriété 23

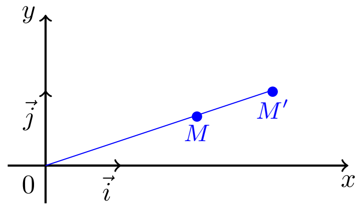
Si $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont deux vecteurs du plan non nuls d'affixes z_1 et z_2. Une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u_1}, \vec{u_2}})$ est donnée par $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ ou $\arg(z_2\overline{z_1})$.
Par suite :
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Corolaire. Soit A, B et C trois points du plan, deux è deux distinct et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}})$ est donné par $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$.
Par suite :
- A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$.

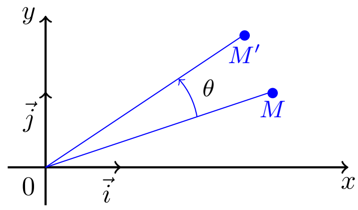
7.2 Transformations remarquables du plan

Propriété 24 (En terme d'affixe)

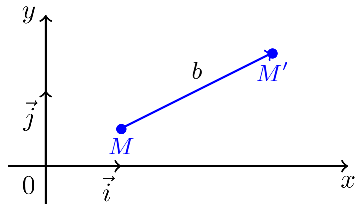
La transformation plane h_a associant au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' où $z' = az$ avec $a \in \mathbb{R}$ est l'homothétie de centre O et de rapport a.



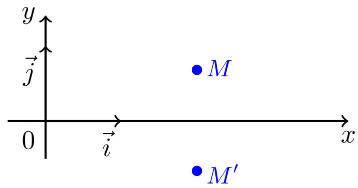
La transformation plane r_θ associant à M d'affixe z le point M' d'affixe z' où $z' = e^{i\theta} z$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est la rotation de centre O et d'angle θ.



Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$. La transformation plane $t_b \ : z \mapsto z + b$ associant à M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.



La transformation plane associant à M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = \overline{z}$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



8 Fonctions à valeurs complexes

Définition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes. On définit les fonctions $Re(f) : I \to \mathbb{R}$ et $Im(f) : I \to \mathbb{R}$ par : pour tout $x \in I$, $Re(f)(x) = Re(f(x))$ et $Im(f)(x) = Im(f(x))$.

Les propriétés de la fonction complexe $f : I \to \mathbb{C}$ se ramène alors aux propriétés des fonctions réelles $Re(f) : I \to \mathbb{R}$ et $Im(f) : I \to \mathbb{R}$.

Propriété 25

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes. Alors f est continue sur I si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.

Preuve. Notons $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$. Pour tout $a \in I$, montrons que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a)$ si et seulement si les limites de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ existent et valent respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$.
Si les limites quand x tend vers a de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ existent et valent respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$, alors on a bien que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a) = f_1(a) + if_2(a)$.

Réciproquement, supposons que la limite quand x tend vers a de $f(x)$ existe et vaut $f(a)$. Alors on a pour tout $x \in I$,

$$|f_1(x) - f_1(a)| = |Re(f(x) - f(a))| \leq |f(x) - f(a)|.$$

Par encadrement on obtient que $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = f_1(a)$. On montre de même que $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = f_2(a)$. □

Propriété 26

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes. Alors f est dérivable sur I si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont, et on a alors : pour tout $x \in I$, $f'(x) = Re(f)'(x) + iIm(f)'(x)$.

Preuve. On note toujours $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$. Soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ existe et est finie. Or :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + i\frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a}.$$

On montre alors de même que précédement que la limite quand x tend vers a de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie si et seulement si les limites $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a}$ et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a}$ existent et sont finies. Ainsi f est dérivable en a si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont, et on a alors $f'(a) = Re(f)'(a) + iIm(f)'(a)$. □

Exemple. Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sin(x) + ie^x \end{array}$

Les fonctions exponentielle et sinus sont dérivables en tout points de $\mathbb{R}$ donc il en est de même de la fonction f. On a : $f'(x) = cos(x) + ie^x$.

Un grand nombre de résultats concernant la dérivabilité des fonctions à valeurs réelles sont encore valable pour les fonctions à valeurs complexes. Citons par exemple :

Propriété 27 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable, fg est dérivable et (si g ne s'annule pas) $\frac{f}{g}$ est dérivable avec

$$(\lambda g + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve. Montrons par exemple que $(fg)' = f'g + fg'$. Notons f_1, f_2, g_1, g_2 les fonctions partie réelle et imaginaires de f et g. On a :

$$fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1).$$

On dérive alors fg en dérivant parties réelles et imaginaires :

$$(fg)' = (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f_2g_1').$$

On vérifie qu'on a alors bien :

$$(fg)' = (f_1' + if_2')(g_1 + ig_2) + (f_1 + if_2)(g_1' + ig_2') = f'g + fg'.$$

□

Propriété 28

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonctions dérivable sur I. Alors, la fonction $t \in I \mapsto e^{\phi(t)} \in \mathbb{C}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}.$$

Preuve. On note $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$. Par compositions, produits et sommes de fonctions dérivables sur I, $\exp(f)$ est dérivable sur I. En utilisant les formules de dérivation usuelles, on obtient :

$$\begin{aligned}\exp(f)' &= f_1' \exp(f_1) \cdot (\cos(f_2) + i\sin(f_2)) + \exp(f_1) \cdot (-f_2' \sin(f_2) + f_2' i \cos(f_2)) \\ &= (f_1' + i f_2') \exp(f_1) \cdot (\cos(f_2) + i \sin(f_2)) = f' \exp(f).\end{aligned}$$

□

Exemple. Déterminer la dérivée n^{ieme} de $f : x \to e^x \sin(\sqrt{3}x)$.

On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que $f(x) = Im(e^x e^{\sqrt{3}ix})$. Posons $g(x) = e^x e^{\sqrt{3}ix}$. Pour obtenir la dérivée n^{ieme} de f, il suffit de prendre la partie imaginaire de la dérivée n^{ieme} de g. Or, g est clairement dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}g^{(n)}(x) &= (1 + i\sqrt{3})^n g(x) = 2^n e^{in\pi/3} g(x) \\ &= 2^n e^x \left(\cos(n\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}x) + i \sin(n\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}x)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2^n e^x \sin(n\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}x)$.