Chapitre 25

Produit scalaire et espaces euclidiens

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Produit scalaire et norme euclidienne

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1 Produit scalaire

Définition.

On appelle **produit scalaire sur** E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire toute application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

- ϕ est bilinéaire :
$$\forall\, x, x', y, y' \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \phi(\lambda.x+x', y) = \lambda.\phi(x, y)+\phi(x', y) \text{ et } \phi(x, \lambda.y+y') = \lambda.\phi(x, y)+\phi(x, y')$$
- ϕ est symétrique :
$$\forall\, x, y \in E,\ \phi(y, x) = \phi(x, y)$$
- ϕ est positive :
$$\forall\, x \in E,\ \phi(x, x) \geq 0$$
- ϕ est définie :
$$\forall\, x \in E,\ \phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Notation. Dans ce cas, on note $\phi(x, y) =< x, y >$ (ou parfois $(x|y)$, ou tout simplement $x \cdot y$).

Remarques.

- Pour montrer la bilinéarité, on pourra se contenter de prouver la linéarité en l'une des variables et la symétrie.
- On s'attachera à montrer avec rigueur le caractère défini (souvent le point non trivial).

Exemples classiques.

- Produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Si $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors :
$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2.$$
- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :
$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$
Ceci se réécrit matriciellement de la manière suivante (avec $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) :
$$< X, Y >=^t X \times Y.$$
- Produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Si $f, g \in E$, on définit un produit scalaire en posant :
$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Exemple. Montrons qu'on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ en posant pour tout $P, Q \in E$:

$$< P, Q >= \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

Exercice. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $M, N \in E$:

$$< P, Q >= Tr({}^tM \cdot N).$$

Définition.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ est appelé espace préhilbertien réel, et noté $(E, < \cdot, \cdot >)$. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, < \cdot, \cdot >)$ est un espace euclidien.

Norme euclidienne

Définition.

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel.

- On définit la **norme euclidienne** sur E par:

$$\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{< x, x >}$$

  En particulier, on dira qu'un vecteur $x \in E$ est **unitaire** s'il vérifie $||x|| = 1$.

- On définit la **distance euclidienne** sur E par:

$$\forall\, x, y \in E,\ d(x, y) = ||x - y||$$

Remarques. La norme euclidienne satisfait les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E$, $||x|| \geq 0$ et $||x|| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0_E$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

En effet, on a :

- $\forall\, x \in E$, $\|\, x \,\| \geq 0$ et si $\|\, x \,\| = 0$ alors $x = 0_E$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E$, $\|\, \lambda x \,\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \,\|\, x \,\|$.

Propriété 1 (Identités remarquables)

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel.

(1) $\forall\, x, y \in E,\ ||x+y||^2 = ||x||^2 + 2 < x, y > + ||y||^2$ et $||x-y||^2 = ||x||^2 - 2 < x, y > + ||y||^2$.

(2) Identité de polarisation :

$$\forall\, x, y \in E,\ < x, y >= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2).$$

(3) Égalité du parallélogramme. $\forall\, x, y \in E,\ 2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$

Preuve.

(1) Il suffit de développer $||x + y||^2$ en utilisant les propriétés du produit scalaire.

(2) On fait la différence des deux égalités obtenues.

(3) On fait la somme des deux identités obtenues.

□

Remarque. On déduit de l'égalité du parallélogramme, la longueur de la médiane du triangle de côté x, y en fonction des longueurs des trois côtés $x, y, x-y$:

$$\|\frac{x+y}{2}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2(||x||^2 + ||y||^2) - ||x-y||^2}.$$

1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et conséquences

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. On a :

$$\forall\, x, y \in E, \quad | < x, y > | \leq ||x||.||y||.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. Fixons $x, y \in E$, et considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = ||tx - y||^2 = t^2||x||^2 - 2t < x, y > + ||y||^2.$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- Si $||x||^2 =< x, x >= 0$, alors puisque le produit scalaire est défini on en déduit que $x = 0_E$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit alors $0 \leq 0$ et est bien satisfaite.
- si $||x||^2 \neq 0$, la fonction f est une fonction polynomiale du second degré en t, à valeurs positives car le produit scalaire est positif. Son discriminant est donc positif :
$$\Delta = 4\left((< x, y >^2 - ||x||^2||y||^2\right) \leq 0.$$
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Si x et y sont liés, on a bien entendu l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité. Si $x = 0_E$, alors x et y sont liés. Si $x \neq 0_E$, l'égalité signifie en reprenant nos calculs que $\Delta = 0$. Ainsi f a une racine double α et $||\alpha x - y|| = 0$, d'où $y = \alpha x$. □

Remarque. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

- dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$
- dans $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Propriété 3

La norme euclidienne satisfait les trois propriétés suivantes :

(1) séparabilité : $\forall x \in E$, $||x|| \geq 0$ et $||x|| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0_E$;

(2) homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

(3) inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Remarque. Une application satisfaisant ses trois points est appelée une norme sur l'espace vectoriel E.

Preuve. Les points (1) et (2) ont déjà été démontré. Montrons l'inégalité triangulaire. Pour $x, y \in E$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \| x \|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \| y \|^2 \\ &= \| x \|^2 + 2 | \langle x, y \rangle | + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\ &\leq (\| x \| + \| y \|)^2. \end{aligned}$$

□

Remarque. Il en découle les propriétés suivantes de la distance euclidienne $d(x, y) = ||x - y||$:

- $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Propriété 4

(1) $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow x = 0$ ou $\exists\, \alpha \geq 0,\ y = \alpha \cdot x$.

(2) $\forall\, x, y \in E,\ | ||x|| - ||y|| | \leq ||x - y||$.

Preuve.

(1) $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow < x, y > = | < x, y > |$ et $| < x, y > | = ||x|| \cdot ||y||$. Or on a égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz si et seulement si $x = 0_E$ ou si il exsite $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$. Comme de plus $< x, y > = | < x, y > |$, on en déduit que $\alpha \geq 0$.

(2) Direct avec $||x|| \leq ||x - y|| + ||y||$ et $||y|| \leq ||y - x|| + ||y||$.

□

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie

Soit $x, y \in E$ des vecteurs non nuls. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que :

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x|| \times ||y||} \leq 1.$$

On définit alors l'angle non orienté $\theta \in [0, \pi]$ des vecteurs x et y par $\theta = \arccos\left(\frac{< x, y >}{||x|| \times ||y||}\right)$. On a ainsi :

$$< x, y > = ||x|| \times ||y|| \times \cos(\theta).$$

Définition.

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel.

- On dit que les vecteurs $x, y \in E$ sont **orthogonaux** si $< x, y >= 0$.
- Plus généralement, deux parties A et B de E sont **orthogonales** si $\forall\ (x, y) \in A \times B$, $< x, y >= 0$.

Remarque. x et $y \in E$ sont orthogonaux si l'un des vecteurs est nul, ou si les deux vecteurs sont non nuls et l'angle non orienté entre x et y est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Propriété 5 (Pythagore)

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. Alors:

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Preuve. On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$. Ainsi on a :

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \quad \Leftrightarrow \quad < x, y >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux.}$$

□

Définition.

Soient $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel et A une partie de E. On appelle **orthogonal de** A l'ensemble noté $A^\perp$ défini par :

$$A^\perp = \{x \in E,\ \forall\ a \in A,\ < x, a >= 0\}.$$

Propriété 6

Soient (E, ϕ) un espace préhilbertien réel et A, B deux parties de E.

(1) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Si $A = Vect(e_1, \ldots, e_n)$, alors

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall\ i \in [|1, n|], \quad < x, e_i >= 0$$

(3) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

(4) $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Preuve.

(1) L'ensemble $A^\perp$ est non vide car $0_E \in A^\perp$. Il est stable par combinaison linéaire: Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $x, y \in A^\perp$, alors $\forall\ a \in A$,

$$\langle a, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda \langle a, x\rangle + \mu \langle a, y\rangle = 0.$$

(2) Par double inclusion.

(3) Soit $b \in B^\perp$, alors pour tout $a \in A$, on a :

$$< b, a >= 0 \quad \text{car } a \in A \subset B.$$

Ainsi $b \in A^\perp$ et donc $B^\perp \subset A^\perp$.

(4) On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ car si $a \in A$, $\forall\ x \in A^{\perp}$,

$$\langle a, x\rangle = 0,\ \text{donc}\ \langle x, a\rangle = 0$$

et on en déduit que $a \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$, ce qui établit l'inclusion.

□

Remarques.

- $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$. En effet, pour la deuxième égalité, si $x \in E^{\perp}$, comme $x \in E$, x est orthogonal à lui-même, donc $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ et $x = 0_E$.
- Ainsi, on a l'équivalence suivante:

$$(\forall\ a \in E,\ \langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle) \Longleftrightarrow (x = y).$$

En effet, si $\forall\ a \in E$, $\langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle$, alors $x - y$ est orthogonal à tout vecteur $a \in E$, donc $x - y \in E^{\perp} = \{0_E\}$ et $x = y$.

2.2 Familles orthogonales, familles orthonormales

Définition.

$(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel.

- On dit qu'une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_k)$ de E est orthogonale si :

$$\forall\ 1 \leq i < j \leq k,\ \langle x_i, x_j\rangle = 0.$$

- Une famille orthogonale de vecteurs $(x_1, \cdots, x_k)$ de E est orthonormale si de plus pour tout $1 \leq i \leq k$, $||x_i|| = \sqrt{\langle x_i, x_i\rangle} = 1$.

Remarque. Pour une famille $(x_1, \cdots, x_k)$ orthonormale, on a ainsi : $< x_i, x_j >= \delta_{i,j}$.

Propriété 7 (Pythagore)

Pour toute famille orthogonale de vecteurs $(x_1, \ldots, x_k)$ de E, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2.$$

Preuve. Les propriétés du produit scalaire et l'orthogonalité des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ donnent :

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2.$$

□

Remarque. La réciproque est vraie lorsque $k = 2$, mais fausse en général lorsque $k \geq 3$.

Propriété 8

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls $(x_1, \ldots, x_k)$ de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve. Formons une combinaisons linéaire nulle de la famille orthogonale de vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ de E : soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ telle que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0_E.$$

En faisant le produit scalaire par un vecteur x_j, $1 \leq j \leq n$, on a:

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle = 0.$$

Par orthogonalité de la famille (x_i), il reste $\lambda_j \|v_j\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $v_j \neq 0_E$. □

Exercice. On considère $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f \ 2\pi\text{-périodique}\}$.

a) Montrer que l'application $< f, g >= \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.

b) Montrer que la famille $(t \mapsto \cos(kt), t \mapsto \sin(kt))_{k=1,\dots,n}$ est une famille orthogonale pour $< \cdot, \cdot >$.

2.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Propriété 9 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ unique, appelée l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, telle que:

- $\forall\ k \in [|1, n|]$, $Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(x_1, \dots, x_k)$.
- $\forall\ k \in [|1, n|]$, $\langle e_k, x_k \rangle > 0$.

Preuve. Montrons par récurrence sur $k \in [|1, n|]$ qu'une telle famille $(e_1, \dots, e_n)$ existe et est unique.

- Supposons $k = 1$. On cherche donc $e_1 \in E$ tel que :
  - $Vect(e_1) = Vect(x_1)$;
  - $||e_1|| = 1$;
  - $< e_1, x_1 >> 0$.

  La première condition impose que $e_1 = \lambda x_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec la deuxième condition, on obtient :
  $$1 = ||e_1|| = |\lambda| \times ||x_1||.$$
  Comme de plus $||x_1|| \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \pm \dfrac{1}{||x_1||}$. Enfin la dernière condition nous donne :
  $$< e_1, x_1 >> 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda ||x_1||^2 > 0, \text{ soit encore } \lambda > 0.$$
  Réciproquement, $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$ satisfait bien les conditions souhaitées.

- Soit $k \in [|1, n-1|]$ et supposons $(e_1, \dots, e_k)$ construits. On cherche à présent e_{k+1} satisfaisant :
  - $Vect(e_1, \dots, e_{k+1}) = Vect(x_1, \dots, x_{k+1})$;
  - $(e_1, \dots, e_{k+1})$ orthonormale ;
  - $< e_{k+1}, x_{k+1} >> 0$.

Puisque par hypothèse de récurrence, on a $Vect(e_1, \ldots, e_k) = Vect(x_1, \ldots, x_k)$, on cherche donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu) \in \mathbb{K}$ tels que :

$$e_{k+1} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + \mu x_{k+1}.$$

De part la deuxième condition, on a pour tout $j = 1, \ldots, k$:

$$< e_{k+1}, e_j >= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_j - \mu < e_j, x_{k+1} >= 0.$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante de e_{k+1} :

$$e_{k+1} = \mu(\underbrace{x_{k+1} - < e_1, x_{k+1} > e_1 - \cdots - < e_k, x_{k+1} > e_k}_{=v_{k+1}}).$$

On a $v_{k+1} \neq 0$ car sinon $x_{k+1} \in Vect(e_1, \ldots, e_k) = Vect(x_1, \ldots, x_k)$.
On doit avoir de plus $||e_{k+1}|| = 1$, ce qui implique $\mu = \pm \dfrac{1}{||v_{k+1}||}$.
Enfin, la dernière condition nous donne :

$$< x_{k+1}, e_{k+1} >=< \frac{1}{\mu} e_{k+1} + < e_1, x_{k+1} > e_1 + \cdots + < e_k, x_{k+1} > e_k, e_{k+1} >= \frac{1}{\mu} > 0.$$

Ainsi, on a montré que :

$$e_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \ldots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k}{\| x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \ldots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k \|}.$$

Réciproquement, on montre (en remontant les calculs) qu'un tel vecteur satisfait bien toutes les conditions souhaitées.

On conclut par principe de récurrence. □

► *Voici l'algorithme à suivre pour orthonormalisé la famille libre $(x_1, \ldots, x_n)$:*

- *poser* $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$ *;*
- *une fois les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ construits,*
  - *poser* $v_{k+1} = x_{k+1} - < e_1, x_{k+1} > e_1 - \cdots - < e_k, x_{k+1} > e_k$ *;*
  - *poser* $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||}$.

Exemple. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$. Orthonormalisons la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

- $Q_0 = \dfrac{1}{||1||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- $R_1 = X - < Q_0, X > Q_0 = X - 1$, et $Q_1 = \dfrac{R_1}{||R_1||} = \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$.
- $R_2 = X^2 - < Q_0, X^2 > Q_0 - < Q_1, X^2 > Q_1 = X^2 - 2X + \dfrac{1}{3}$, et $Q_2 = \dfrac{R_2}{||R_2||} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \left(X^2 - 2X + \dfrac{1}{3} \right)$.

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

3.1 Existence de bases orthonormées d'un espace euclidien

Définition.

Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien. Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E s'il s'agit d'une famille orthonormée et d'une base de E.

Exemples.

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.
- La famille $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.
- Pour ce même produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, on a la base orthonormée (L_0, L_1, L_2) des polynômes de Lagrange, où $L_i(j) = \delta_{i,j}$ avec $0 \leq i, j \leq 2$.

Propriété 10

Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien. Il existe une base orthonormée de E.

Preuve. Puisque E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E. Notons alors $(e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de cette famille. C'est une famille orthonormale, donc libre de n vecteurs de E. C'est donc une base orthonormée de E. □

Propriété 11

Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Preuve. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée de E. C'est en particulier une famille libre de E, qu'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ de E. On applique alors à cette famille le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir alors une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E (on notera que les k premiers vecteurs restent inchangés quand on applique l'algorithme). □

Exercice. Après avoir normalisé le vecteur $x_1 = (3, 0, 4)$, compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

3.2 Formules dans une base orthonormée

L'intérêt des bases orthonormales résulte des propriétés suivantes.

Propriété 12

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

- Pour tout $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ de E, on a :
$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$
- Pour tout $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ de E, on a :
$$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$
- Pour tout x dans E, on a :
$$x = \langle e_1, x \rangle e_1 + \ldots + \langle e_n, x \rangle e_n.$$

Preuve.
$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$
On en déduit en particulier $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.
De plus, en faisant le produit scalaire de x avec les e_k, on a :
$$\langle e_k, x \rangle = \left\langle e_k, \sum_{i=1}^n x_ie_i \right\rangle = \sum_{i \in I} x_i \langle e_k, e_i \rangle = x_k.$$
On en déduit $x = \langle e_1, x \rangle e_1 + \ldots + \langle e_n, x \rangle e_n$. □

ATTENTION. Ces formules sont valables uniquement lorsque la base $\mathcal{B}$ considérée est orthonormale.

4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

4.1 Supplémentaire orthogonal

Propriété 13

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors on a :
$$E = F \oplus F^\perp.$$
Le sous-espace $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Preuve. F étant de dimension finie, on considère dans la suite $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de F.

- Analyse. Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^p x_ie_i + y$ avec $y \in F^\perp$. On a pour tout $i = 1, \ldots, p$, $< x, e_i >= x_i$ (car $< y, e_i >= 0$), d'où :
$$x = \sum_{i=1}^p < x, e_i > e_i + \left(x - \sum_{i=1}^p < x, e_i > e_i \right).$$

- Synthèse. Soit $x \in E$ qu'on décompose de ma manière suivante :
$$x = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i + \left(x - \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i \right).$$
Le premier terme appartient à F, et on vérifie que le second appartient bien à $F^{\perp}$.

□

Propriété 14

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un **espace euclidien**. Pour tout sous-espace F de E on a :

- $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$;
- $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Preuve.

- Il suffit de prendre la dimension dans la somme direct $E = F \oplus F^{\perp}$ (égalité satisfaite car F de dimension finie).
- On a déjà l'inclusion $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. De plus en prenant les dimensions, $\dim(\left(F^{\perp}\right)^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F^{\perp}) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F)$. Ainsi on a bien $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

□

Exemple. Considérons $E = \mathbb{R}^3$, F le sous-espace défini par l'équation $x+y+z = 0 =< (x, y, z), (1, 1, 1) >$. Ainsi $F^{\perp} = Vect(1, 1, 1)$ est le supplémentaire orthogonal de F.

Remarque. Le deuxième point n'est pas vrai en dimension infinie : on a $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, mais ce n'est pas une égalité en général.

Exercice. On considère $E = \{$suites réelles nulles à partir d'un certain rang$\}$ muni du produit scalaire $< u, v >= \sum_{i=0}^{+\infty} u_n v_n$. On pose $F = \{u \in E | \sum_{i=0}^{+\infty} u_n = 0\}$.

a) Montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.

b) En déduire que $F \subsetneq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et que $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

4.2 Projeté orthogonal

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On a montré qu'alors :
$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Définition.

On appelle projection orthogonale sur F, notée p_F, la projection sur F dans la direction de $F^{\perp}$.

Propriété 15

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de F. Alors on a pour tout $x \in E$,
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i.$$

Preuve. Il suffit de reprendre la démonstration de la somme direct $E = F \oplus F^{\perp}$: on a montré que tout $x \in E$ se décompose de façon unique en $x = y + z$ avec $y \in F$ donné par :

$$y = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i.$$

□

Exercice. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace d'équations:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer une base orthonormale de F.

b) Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F.

Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et notons $F_k = Vect(e_1, \ldots, e_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On peut réécrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la manière suivante :

- poser $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$;
- une fois les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ construits,
  - poser $v_{k+1} = x_{k+1} - p_{F_k}(x_{k+1})$;
  - poser $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||}$.

Exercice. Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad < p(x), y >=< x, p(y) > .$$

$\Rightarrow$ Supposons que p soit un projecteur orthogonal sur F. Alors pour tout $x, y \in E$, il existe $x_1, y_1 \in F$, $x_2, y_2 \in F^{\perp}$ tels que :

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2.$$

On a alors :

$$< p(x), y >=< x_1, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 >$$
$$< x, p(y) >=< x_1 + x_2, y_1 >=< x_1, y_1 > .$$

D'où le résultat.

$\Leftarrow$ Supposons que p soit un projecteur tel que pour tout $x, y \in E$, $< p(x), y >=< x, p(y) >$. Notons alors $F = Im(p)$ et $G = Ker(p)$. Il suffit de montrer que $G = F^{\perp}$. On a pour tout $x \in F$ et pour tout $y \in G$:

$$< x, y >=< p(x), y >=< x, p(y) >=< x, 0_E >= 0.$$

Ainsi, $G \subset F^{\perp}$. On conclut alors en prenant les dimensions (avec le théorème du rang) :

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(F^{\perp}).$$

Définition.

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, la symétrie par rapport à F dans la direction de $F^{\perp}$.

Exercice. Supposons $(E, < \cdot, \cdot >)$ euclidien, et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad < s(x), y >=< x, s(y) > .$$

Définition.

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien. On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

4.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Propriété 16

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour tout $x \in E$, la projection orthogonale $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise la plus courte distance de x à F, c'est à dire :

$$d(x, F) = \min\{||x - y||, y \in F\} = ||x - p_F(x)||.$$

De plus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, la distance de x à F est :

$$d(x, F) = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}.$$

Preuve. Pour tout vecteur y appartenant à F, on a:

$$x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y).$$

Comme $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F, on a $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$. Donc $p_F(x) - y \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et le théorème de Pythagore donne:

$$\| x - y \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) - y \|^2 \geq \| x - p_F(x) \|^2 .$$

Donc $\| x - y \| \geq \| x - p_F(x) \|$ avec égalité pour $\| p_F(x) - y \| = 0$, c'est-à-dire $y = p_F(x)$. On en déduit que

$$d(x, F) = \| x - p_F(x) \| = \inf\{\| x - y \| \mid y \in F\}.$$

Comme $(e_0, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, on a $p_F(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k$. Comme le théorème de Pythagore donne $\| x \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) \|^2$ et $\| p_F(x) \|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2$, on a :

$$d(x, F) = \| x - p_F(x) \| = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2}.$$

□

Propriété 17 (Inégalité de Bessel)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel euclidien $(E, <\cdot,\cdot>)$. On a l'inégalité :

$$\forall x \in E, \quad ||p_F(x)|| \leq ||x||.$$

De plus si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2} \leq \| x \| \,.$$

Preuve. Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = (x - p_F(x)) + p_F(x)$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$. Par Pythagore, on en déduit :

$$||x||^2 = ||x - p_F(x)||^2 + ||p_F(x)||^2 \geq ||p_F(x)||^2.$$

D'où l'inégalité de Bessel. La seconde inégalité en découle en notant comme dans la preuve précédente que $\| p_F(x) \|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2$, toujours par Pythagore. □

Exemple. Calculer la distance de $v = (3, 0, 1)$ au plan vectoriel $F = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$.

Exemple. La droite des moindres carrés. On observe l'évolution d'un phénomène physique au cours du temps, en relevant à intervalles de temps (réguliers ou non) $x_1, \dots, x_n$ une certaine grandeur $y_1, \dots, y_n$.
On cherche à trouver une relation linéaire entre les x_i et les y_i, c'est à dire qu'on souhaite "placer" tous ces points sur une même droite. On cherche donc $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad y_i = ax_i + b.$$

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. On cherche donc à résoudre l'équation matricielle :

$$Y = AU$$

où $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Il est cependant peu probable que cette équation ait des solutions puisque les points ne sont surement pas sur la même droite, ce qui se traduit par $Y \notin Im(A)$. On cherche donc à résoudre ce système d'équations de façon approchée. Pour cela, il est naturel de chercher le vecteur $U \in \mathbb{R}^2$ qui minimise :

$$||AU - Y||.$$

On dit qu'on résout cette équation au sens des moindres carrés. D'après le cours, on sais que :

$$\min_{V \in \mathbb{R}^2} ||AV - Y|| = ||Y - p(Y)||$$

où p est la projection orthogonale sur $Im(A)$. On est donc ramené à chercher $U \in \mathbb{R}^2$ tel que $p(Y) = AU$. On a :

$$\begin{aligned} Y - p(Y) \in Im(A)^\perp = Vect\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)^\perp &\Leftrightarrow < X, Y - p(Y) >= 0 \text{ et } < \mathbf{1}, Y - p(Y) >= 0 \\ &\Leftrightarrow {}^t X \times (Y - p(Y)) = 0 \text{ et } {}^t\mathbf{1} \times (Y - p(Y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^t A(Y - p(Y)) = 0_{2,1} \\ &\Leftrightarrow {}^t A \times AV = {}^t AY \end{aligned}$$

D'où finalement si ${}^tA \times A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, la solution au sens des moindres carrés est :

$$V = ({}^tA \times A)^{-1} \times {}^t AY.$$

Remarque. La matrice $({}^tA \times A)$ est bien inversible car $\det({}^tA \times A) = -(\sum x_i)^2 + n \sum x_i^2$. Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(\sum x_i \times 1)^2 \leq \left(\sum 1\right) \times \left(\sum x_i^2\right) = n \sum x_i^2$$

avec égalité si et seulement si X et $\mathbf{1}$ sont colinéaires, c'est à dire si les x_i sont tous égaux.