Chapitre 17

Espaces vectoriels

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

Définition.

Soit E un ensemble non vide muni :

- d'une loi de composition interne notée $+$ (l'addition) :

$$\begin{array}{rcl} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

- d'une loi externe notée $\cdot$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda.y \end{array}$$

On dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou de manière abrégée $\mathbb{K}$-e.v., ou e.v.), si :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif, c'est à dire :
  - l'addition est associative : $\forall (x,y,z)\in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
    On pourra ainsi écrire $x+y+z$.
  - l'addition est commutative : $\forall (x,y)\in E^2$, $x+y=y+x$.
  - l'addition admet un élément neutre : $\exists e\in E$, $\forall x\in E$, $x+e=e+x=x$.
  - tout élément de E est symétrisable : pour tout $x\in E$, il existe $x'\in E$ tel que $x+x'=e$.
- La multiplication par un scalaire $\cdot$ vérifie :
  - . est "associative" : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall x\in E$, $\lambda.(\mu.x)=(\lambda\mu).x$.
  - . est distributive sur l'addition de E : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall x\in E$, $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$.
  - . est distributive sur l'addition de $\mathbb{K}$: $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$.
  - $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour . : $\forall x\in E$, $1_{\mathbb{K}}\cdot x = x$.

Vocabulaire. On appelle :

- **scalaires** les éléments λ de $\mathbb{K}$;
- **vecteurs** les éléments x (ou $\vec{x}$) de l'espace vectoriel E.

Remarques.

- L'élément neutre de $(E,+)$ est unique : en effet si $e,e'\in E$ sont des éléments neutres pour $+$, on a :

$$e' = e+e' = e.$$

  On note cet élément neutre 0_E et on l'appelle le vecteur nul de E.

- Pour tout $x\in E$, l'élément x' tel que $x+x'=0_E$ est unique, appelé le symétrique de x dans $(E,+)$ et noté $-x$: en effet si $x',x''\in E$ satisfont ces hypothèses, on a :

$$x' = x'+0_E = x'+(x+x'') \underset{\text{associativité de }+}{=} (x'+x)+x'' = 0_E+x'' = x''.$$

Propriété 1 (Règles de calcul dans un e.v.)

(1) Pour $x \in E$, on a $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$;

(2) $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\lambda \cdot x = 0_E \;\Rightarrow\; \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$;

(3) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$. En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x$;

(4) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in E$, $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$;

(5) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$, $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$.

Preuve.

(1) Soit $x \in E$. Alors $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$ par distributivité. Ainsi, en ajoutant le symétrique de $0_{\mathbb{K}}.x$, on obtient : $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ par distributivité. Ainsi on obtient $\lambda.0_E = 0_E$ en ajoutant l'opposé de $\lambda.0_E$.

(2) Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ tel que $\lambda \cdot x = 0_E$. Supposons $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et montrons que $x = 0_E$. On a

$$x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot x = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E.$$

(3) Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a :

$$(-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x = (-\lambda + \lambda) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E.$$

Donc $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x$.

$$\lambda \cdot (-x) + \lambda \cdot x = \lambda \cdot (-x + x) = \lambda \cdot 0_E = 0_E.$$

Donc $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$

Enfin pour $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$, $(-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -(1_{\mathbb{K}} \cdot x) = -x$.

(4) et (5) découlent directement de (3).

□

1.2 Espaces vectoriels de référence

Espace vectoriel $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel où le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}} = 0$. En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On peut voir aussi $\mathbb{C}$ est comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe :

$$\cdot \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \times x \quad \text{produit dans } \mathbb{C}. \end{array}$$

Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et R^3 des vecteurs du plan et de l'espace forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Plus généralement pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur l'ensemble $\mathbb{K}^n$ les lois suivantes :

- l'addition : pour $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_3 + y_3);$$

- la multiplication par un scalaire : pour $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda.(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Propriété 2

Muni des lois précédentes, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, où le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \cdots, 0)$.

Preuve.

- – Soit $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{K}^n$, on a
$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, ..., x_n) + ((y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)) \\ &= (x_1, ..., x_n) + ((y_1 + z_1, ..., y_n + z_n)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) + (z_1, ..., z_n) \\ &= ((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)) + (z_1, ..., z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$
  donc + est associative.
  - Soit $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$ donc + est commutative.
  - Le n-uplet $0_{\mathbb{K}^n} = (0, ..., 0)$ est élément neutre, puisque pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a $x + 0_{\mathbb{K}^n} = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = x$.
  - Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a : $(x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (0, ..., 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$ et donc l'opposé de x est $-x = (-x_1, ..., -x_n)$.
- Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$, on a:
  - $\lambda.(\mu.x) = \lambda.(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = (\lambda\mu x_1, \dots, \lambda\mu x_n) = (\lambda\mu).x$
  - $(\lambda + \mu).x = ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda.x + \mu.x$
  - $\lambda.(x + y) = (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) = \lambda.x + \lambda.y$
  - $1.x = (1x_1, ...1x_n) = x$.

□

Produit cartésien d'espaces vectoriels

Considérons n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_n$, et le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in E_i\}$. On définit les opérations suivantes :

- l'addition : $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$;
- la multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$.

Propriété 3

Muni de ces opérations, $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, où le vecteur nul 0_E est égal à $(0_{E_1}, \cdots, 0_{E_n})$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $E = \mathbb{K}$, on retrouve ainsi que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espaces vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Si $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{n,p}$.

Espace vectoriel $\mathcal{F}(\Omega, E)$

Soient Ω un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $(f, g) \in \mathcal{F}(\Omega, E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les applications suivantes:

$$f + g : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda.f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Propriété 4

Si Ω est un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $(\mathcal{F}(\Omega, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul $0_{\mathcal{F}(\Omega,E)}$ est la fonction $\Omega \to E, \omega \mapsto 0_E$.

Preuve.

- – Soit $(f, g, h) \in \mathcal{F}(\Omega, E)^3$. Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x)\end{aligned}$$

  Ainsi, $f + (g + h) = (f + g) + h$ et $+$ est associative.

  – Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(\Omega, E)$. Pour tout $x \in \Omega$, on a $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$ donc $f + g = g + f$.

  – La fonction nulle :

$$0_{\mathcal{F}(\omega,E)} : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ x & \mapsto & 0_{\mathbb{K}} \end{array}$$

  est élément neutre puisque pour tout $f \in \mathcal{F}(\Omega, E)$ et pour tout $x \in \Omega$, on a $(f + 0_{\mathcal{F}(\omega,E)})(x) = f(x) + 0_{\mathbb{K}} = f(x)$ donc $f + 0_{\mathcal{F}(\omega,E)} = f$.

  – Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, E)$. La fonction $-f : \Omega \to E$, $x \mapsto -f(x)$ vérifie l'égalité $f + (-f) = 0_{\mathcal{F}(\omega,E)}$.

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $f, g \in \mathcal{F}(\Omega, E)$

  – Pour tout $x \in \Omega$, on a $(\lambda.(\mu.f))(x) = \lambda.(\mu.f(x)) = (\lambda\mu).f(x) = ((\lambda\mu).f)(x)$ donc $\lambda.(\mu.f) = (\lambda\mu).f$.

  – Pour $x \in \Omega$, on a $((\lambda+\mu).f)(x) = \lambda.f(x)+\mu.f(x) = (\lambda.f+\mu.f)(x)$ donc $(\lambda+\mu).f = \lambda.f+\mu.f$.

  – Pour tout $x \in \Omega$, on a $(\lambda.(f + g))(x) = \lambda.(f(x) + g(x)) = \lambda.f(x) + \mu.g(x) = (\lambda.f + \mu.g)(x)$ donc $\lambda.(f + g) = \lambda.f + \mu.g$.

  – Pour tout $x \in \Omega$, $(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x)$, donc $1.f = f$.

□

Remarque. Si $\Omega = \mathbb{R} = \mathbb{K}$, on en déduit par exemple que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Les fonctions $\cos, \exp, \dots$ sont des exemples de vecteurs de cet espace vectoriel.

Comme conséquence, on retrouve la propriété suivante prouvée dans un chapitre précédent :

Propriété 5

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à 0.

Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ est le polynôme nul.

1.3 Combinaisons linéaires

Définition.

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_p \in E$. On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire des vecteurs** $x_1, ..., x_p \in E$ s'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + ...\lambda_p \cdot x_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i.$$

- Soit X une partie de E. On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire de vecteurs de** X si x est combinaison linéaire d'une **famille finie** de vecteurs de X.

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1, 2, 0)$ est combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0)$, mais pas de $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$.
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto 1$, $\cos$, $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \cos(3x)$.
- Si $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $X = \{e_n : x \mapsto x^n | n \in \mathbb{N}\}$, $f \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si et seulement si f est une fonction polynomiale. Les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leq k \leq n$ sont les fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si

(i) $F \neq \emptyset$;

(ii) $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.x + \mu.y \in F$.

Exemple. Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Remarques.

- Si F est un s.e.v. de E, alors F est stable par combinaisons linéaires : on le montre par récurrence en utilisant (ii).
- Tout sous-espace F de E contient le vecteur nul 0_E : en effet, puisque $F \neq \emptyset$, il existe $x \in F$. D'où $0_E = 0 \cdot x \in F$.
- Pour montrer que $F \neq \emptyset$, on vérifiera que $0_E \in F$. En particulier, si $0_E \notin F$, F ne peut pas être un s.e.v.

Remarque. Comme un sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires, on peut le munir des lois induites :

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

Propriété 6

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F un sous-espace de E. Alors F muni des lois induites est lui-même un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Preuve.

- L'ensemble F est muni d'une addition et d'une loi externe.
-
  - L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans E contenant F.
  - Comme $0_E \in F$, l'addition de F possède un élément neutre : en effet pour tout $x \in F \subset E$, on a $x + 0_E x$.
  - Soit $x \in F$. Alors $-x = (-1).x \in F$, donc tout élément de F admet un opposé qui est bien dans F.
- Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque x et y appartiennent à E, sont à fortiori vraies lorsque x et y appartiennent à F.

$\square$

Exercice. Montrer que $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1+x_2+x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En est-il de même pour $G = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; \ x_1+x_2+x_3 = 1\}$?

$(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et $0+0+0 = 0$, ainsi, $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ et $F \neq \emptyset$.
Soient $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda.x + \mu.y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$ vérifie

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(x_1 x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) = 0$$

donc $\lambda.x + \mu.y \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
G n'est pas un espace vectoriel puisque $0_{\mathbb{K}^3} \notin G$.

Remarque. Plus généralement dans le plan, une droite D passant par $(0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Dans l'espace, une droite D ou un plan P passant par $(0,0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exemples.

- Pour $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble des matrices diagonales, triangulaires supérieures (ou inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- Les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des solutions, sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$.

Exercice. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

► *Pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans la sous-partie précédente.*

Exercices. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

- ♦ $\mathcal{C} = \{$ suites convergentes $\}$;
- ♦ $\mathcal{P} = \{$ fonctions paires $\}$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit X une partie de $(E, +, \cdot)$ e.v. On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X (pour l'inclusion).

Exemple. Dans le plan, si $X = \{u\}$ avec $u \neq 0$. Alors ce s.e.v est la droite vectorielle dirigée par u :

$$\mathcal{D} = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Propriété 7

L'intersection $\cap_{i \in I} F_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Pour tout $i \in I$, $0 \in F_i$, donc $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Soient $(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. pour $i \in I$, $(x, y) \in F_i^2$ donc $\lambda.x + \mu.y \in F_i$. Ainsi $\lambda.x + \mu.y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
Ainsi $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque. La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel : dans $E = \mathbb{R}^2$, si F_1 est l'axe des abscisses et F_2 l'axe des ordonnées, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans $F_1 \cup F_2$, mais pas $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

Définition.

Soit $(E, +, \cdot)$ un e.v. et X une partie de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X et on note $Vect(X)$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X.

Remarque. D'après ce qui précède un tel s.e.v. existe : c'est l'intersection des sous-espaces contenant X (dont fait partie E) :

$$Vect(X) = \bigcap_{X \subset F,\ F\ s.e.v.} F.$$

En effet :

- $\displaystyle\bigcap_{X \subset F,\ F\ s.e.v.} F$ est bien un sous-espace vectoriel de E par la propriété précédente ;
- c'est bien le plus petit au sens de l'inclusion car pour tout G s.e.v. de E tel que $X \subset G$, on a $\displaystyle\bigcap_{X \subset F,\ F\ s.e.v.} F = G \cap \bigcap_{X \subset F,\ F\ s.e.v.} F \subset G$.

Propriété 8

(1) F est un sous-espace vectoriel $\Leftrightarrow F = Vect(F)$;

(2) Si $X \subset Y$, alors $Vect(X) \subset Vect(Y)$.

Preuve.

□

Propriété 9

Soit $(E, +, \cdot)$ un e.v. et X une partie non vide de E. Alors le sous-espace $Vect(X)$ est égal à l'ensemble $\mathcal{C}$ des combinaisons linéaires des vecteurs de X.

Preuve. Montrons que $Vect(X) = \mathcal{C}$ par double inclusion.

$\supset$ $Vect(X)$ est un sous-espace vectoriel contenant X. Il contient donc toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de X, donc $\mathcal{C} \subset Vect(X)$.

$\subset$ Montrons que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant X.

- Pour tout $x \in X$, x est une combinaison linéaire de vecteurs de X, donc $x \in \mathcal{C}$ et on a bien $X \subset \mathcal{C}$.
- On a déjà que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $X \subset \mathcal{C}$. Soient à présent $x, y \in \mathcal{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors x et y sont des combinaisons linéaires de vecteurs de X. Mais alors $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ est aussi une combinaison linéaire d'éléments de X. Donc $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ appartient à $\mathcal{C}$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant X. Comme $Vect(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X, on obtient bien $Vect(X) \subset \mathcal{C}$.

□

Remarque. Si $X = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est finie, on note $Vect(\{e_1, \cdots, e_n\})$ plus simplement $Vect(e_1, \cdots, e_n)$ ou $Vect(e_i)_{i=1,\ldots,n}$. On a alors l'égalité :

$$Vect(e_1, \cdots, e_n) = \{\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

En particulier, on a $x \in Vect(e_1, ..., e_n) \iff \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

Exemples.

- Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, $Vect(1) = \mathbb{R}$, $Vect(i) = i\mathbb{R}$. Dans le $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}$, $Vect(1) = \mathbb{C}$.
- Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $Vect(x, y)$ est un plan vectoriel.
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $X = \{e_n : x \mapsto x^n | n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.
- Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles satisfaisant :
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
est (en notant $r_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$) :
$$\mathcal{S} = \left\{\lambda r_+^n + \mu r_-^n | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = Vect((r_+^n)_n, (r_-^n)_n).$$
En particulier, on obtient que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Écrire F comme s.e.v. engendré par une partie.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x - y) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} = Vect((1, 0, -1), (0, 1, -1)) \end{aligned}$$

Ainsi F est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$. En particulier ce qu'on a fait montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Montrons l'égalité des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$F = Vect(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = Vect(v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (3, -2, -2), v_3 = (1, -2, 1)).$$

A faire...

Exercices. Écrire F comme s.e.v. engendré par une partie dans les cas suivants :

- ♦ $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - t = 0\}$.
Solution : $F = Vect((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$.
- ♦ $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.
Solution : $F = Vect((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de F et G et on note $F + G$ l'ensemble $F + G = \{x + y \ ; \ (x, y) \in F \times G\}$.

Propriété 10

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Comme $0 \in F$ et $0 \in G$, $0 = 0 + 0 \in F + G$. Soient $(x, y) \in (F + G)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a $(e, f) \in F^2$ et $(g, h) \in G^2$ tels que $x = e + g$ et $y = f + h$. Alors $\lambda.x + \mu.y = \lambda.(e + g) + \mu.(f + h) = (\lambda.e + \mu.f) + (\lambda.g + \mu.h)$, avec $\lambda.e + \mu.f \in F$ et $\lambda.g + \mu.h \in G$. Ainsi $\lambda.x + \mu.y \in F + G$ et $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque. On a $F + G = Vect(F \cup G)$. En effet :

$\supset$ Si $x \in F$, on écrit $x = x + 0$ avec $0 \in G$, donc $x \in F + G$ et $F \subset F + G$. On montre de même que $G \subset F + G$. Ainsi, $F \cup G \subset F + G$. Puisque $F + G$ est un espace vectoriel contenant $F \cup G$, et que $Vect(F \cup G)$ est le plus petit espace vectoriel contenant $F \cup G$, on obtient $Vect(F \cup G) \subset F + G$.

$\subset$ Réciproquement soit $z \in F + G$, on a $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Alors $x \in Vect(F \cup G)$, $y \in Vect(F \cup G)$. Puisque $Vect(F \cup G)$ est un s.e.v., on en déduit que $z \in Vect(F \cup G)$ et donc que $F + G \subset Vect(F \cup G)$.

Exemples.

- $F + \{0_E\} = F$ et $F + F = F$. Plus généralement si $F \subset G$, alors on a $F + G = G$: en effet en utilisant la remarque précédente, on a $F + G = Vect(F \cup G) = Vect(G)$.
- Si $(v_1, \ldots, v_m)$ et $(w_1, \ldots, w_n)$ sont deux familles de vecteurs de E, alors :

$$Vect(v_1, \ldots, v_m) + Vect(w_1, \ldots, w_n) = Vect(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} z \in Vect(v_i)_i + Vect(w_j)_j &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in Vect(v_i)_i \times Vect(w_j)_j, z = x + y \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots \mu_n \in \mathbb{K}, z = \sum_i \lambda_i \cdot v_i + \sum_j \mu_j \cdot w_j \\ &\Leftrightarrow z \in Vect(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

Définition.

On dit que la somme $F + G$ est directe si pour tout $z \in F + G$, la décomposition $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ est unique, c'est à dire :

$$\forall z \in F + G, \quad \exists! (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

On note alors $F \oplus G$.

Propriété 11 (Caractérisation des sommes directes)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons que la somme $F + G$ soit directe. On a $0 \in F$ et $0 \in G$ donc $0 \in F \cap G$ et $\{0\} \subset F \cap G$. Soit $x \in F \cap G$. Alors x s'écrit $x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$, mais aussi $0 + x$, avec $0 \in F$ et $x \in G$. Par unicité de l'écriture, $x = 0$. Ainsi $F \cap G \subset \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons $F \cap G = \{0\}$. Soit $z \in F + G$, et (x, y), $(x', y') \in F \times G$ tels que $z = x + y$ et $z = x' + y'$. Alors $x + y = x' + y'$ donc $x - x' = y' - y$, avec $x - x' \in F$ (car x et $x' \in F$) et $y' - y \in G$ (car y et $y' \in G$). Ainsi $x - x' = y' - y \in F \cap G = \{0\}$, donc $x - x' = y' - y = 0$ et $x = x'$, $y = y'$. On a donc unicité de l'écriture de z comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc la somme est directe.

□

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels:

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = Vect((1, 1, 1))$$

Montrons que F et G sont en somme directe : soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a(1,1,1)$. Comme $x \in F$, on a $3a = 0$ et donc $a = 0$; par suite $x = 0$, ce qui prouve que la somme $F + G$ est directe.

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires dans** E si $E = F \oplus G$. Ainsi, on a la caractérisation :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in E, \exists!(x,y) \in F \times G, z = x + y$$

Propriété 12 (Caractérisation)

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple. $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (-1,1)$. Montrons que $E = Vect(e_1) \oplus Vect(e_2)$. Soit $(x,y) \in E$, et cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(x,y) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2$$

On a :

$$(x,y) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + y \\ b = y \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, donc $\mathbb{R}^2 = Vect(e_1) \oplus Vect(e_2)$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels:

$$F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = Vect((1,1,1))$$

Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

- On a déjà montré que $F \cap G = \{0_E\}$.
- De façon immédiate, on a $F + G \subset \mathbb{R}^3$. Démontrons l'autre inclusion.

  Brouillon (Analyse) :

  Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $y = (y_1,y_2,y_3) \in F$ tels que $x = y + a(1,1,1)$. On a alors : $y_1 + y_2 + y_3 = a_1 - a + a_2 - a + a_3 - a = 0$. Ainsi, $a = \dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ puis $y = (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a)$.

  Rédaction (Synthèse) :

  Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Posons $a = \dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ et $y = (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a)$, on a bien $x = y + a(1,1,1)$, $y \in F$ et $a(1,1,1) \in G$.

  Finalement, on a bien prouvé que $\mathbb{R}^3 \subset F + G$ et donc $\mathbb{R}^3 = F + G$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels:

$$F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \qquad \text{et} \qquad H = Vect(1,0,0)$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Remarque. Comme on le voit dans le dernier exemple, un sous-espace vectoriel a en général plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'**un** supplémentaire et non du supplémentaire.

Exemple. On a $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. On le démontre par analyse-synthèse.
A faire.

3 Familles finies de vecteurs

3.1 Familles libres

Définition.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une **famille libre** (ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement indépendants**) si :

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies (\forall i \in [|1, n|],\ \lambda_i = 0)\Big)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est **liée** (ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement dépendants**).

Remarques.

- Une famille composée d'un vecteur non nul est libre.
- Une famille composée de deux vecteurs non colinéaires est libre.
- Une famille contenant le vecteur nul est liée.

Exemples.

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est libre, puisque pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a + ib = 0 \quad \implies \quad a = b = 0.$$

  En revanche, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est liée puisque $i.1 + (-1).i = 0$.
- La famille $(1, X, ..., X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque si $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des scalaires vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^i = 0$ alors, ils sont tous nuls.

Exemple. Soit $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 2, -1)$ et $x_3 = (-1, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que (x_1, x_2, x_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$.
Cette relation est équivalente à un système homogène de trois équations à trois inconnues de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ donnent la matrice :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$ donne $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Comme cette dernière matrice est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, A_2 est inversible et le système homogène ne possède que la solution nulle. La famille est donc libre.

Exercice. Montrer que $(\sin, \cos)$ est un famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Ceci se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$$

En évaluant en $x = 0$ (resp. $x = \frac{\pi}{2}$), on obtient : $\lambda = 0$ (resp. $\mu = 0$). On a donc $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, et la famille $(\sin, \cos)$ est donc libre.

Propriété 13

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre d'éléments de E. Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall i \in [|1, n|],\ \lambda_i = \mu_i\Big)$$

Preuve. Immédiat puisque $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i \implies (\forall i \in [|1, n|],\ \lambda_i = \mu_i)$. □

Définition.

On dit qu'une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ $(P_0, \dots, P_n)$ est de degrés échelonnés si $d^\circ P_0 < \cdots < d^\circ P_n$.

Propriété 14

Une famille de polynôme de degrés échelonnés de polynômes non nuls est libre.

Preuve. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0.$$

Notons $d_n = \deg(P_n)$. On obtient en identifiant les coefficients en X^{d_n} :

$$\lambda_n CD(P_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = 0 \text{ car } CD(P_n) \neq 0.$$

On obtient $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$. En répétant cet argument, on trouve successivement $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \cdots = \lambda_0 = 0$. Donc $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. □

Exemple. $(1, X + 1, X^3 - X)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 15

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, l'un des vecteurs x_i s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

Preuve. Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot xi = 0$. Comme $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, il existe $k \in [|1, n|]$ tel que $\lambda_k \neq 0$. On a alors $x_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$ et x_k est combinaison linéaire de $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$. □

Remarque. On déduit de la propriété précédente qu'une famille de trois vecteurs non coplanaires est libre : en effet si (e_1, e_2, e_3) est liée, alors par exemple e_1 appartient à $Vect(e_2, e_3)$ et les trois vecteurs seraient coplanaires.

Attention. Une famille de trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre (prendre par exemple $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1))$).

Propriété 16

(1) Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.

(2) Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Preuve.

(1) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre, et L une sous-famille de $(x_1, \dots, e_n)$. Quitte à réarranger les termes, on peut supposer que $L = (x_1, \dots, x_p)$ avec $p \in [|1, n|]$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i = 0$. Pour $j \in [|p+1, n|]$, on pose $\lambda_j = 0$, de sorte que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

(2) C'est la contraposée du résultat précédent.

□

Propriété 17

Soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre d'éléments de E et $x \in E$. On a :

$$(x_1, ..., x_n, x) \text{ est liée} \quad \Leftrightarrow \quad x \in Vect(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Preuve.

$\Leftarrow$ Supposons $x \in Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. On a alors : $1.x + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) x_i = 0$. et par suite, la famille $(x_1, x_1, ..., x_n, x)$ est liée.

$\Rightarrow$ Supposons la famille $(x_1, ..., x_n, x)$ liée. Alors, on a :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \alpha x = 0.$$

Supposons que $\alpha = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ car $(x_1, \dots, x_n)$ est libre... absurde !

Ainsi on a $\alpha \neq 0$, et alors $x = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.

□

Remarque. On en déduit en particulier que si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, alors :

$$(x_1, ..., x_n, x) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin Vect(x_1, x_2, ..., x_n).$$

3.2 Familles génératrices

Définition.

Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si $Vect(x_1, x_2, ..., x_n) = E$, c'est à dire :

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Exemples.

1. La famille $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. La famille (1) est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(1, X, ..., X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque pour tout polynôme P de degré au plus n, il existe $(p_0, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i X^i$.

Exercice. Montrer que la famille $((1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (3, 2, 1))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?

Propriété 18

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E et soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.
La famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E si et seulement si tout élément de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}$.

Remarque. En particulier, toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{G}$ génératrice de E. Tout vecteur de E est alors combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}$, et en particulier tout vecteur de $\mathcal{F}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que tout élément de $\mathcal{F}$ soit combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}$. Alors, tout élément de $\mathcal{F}$ appartient à $Vect(\mathcal{G})$ et donc $Vect(\mathcal{F}) \subset Vect(\mathcal{G})$. Comme $Vect(\mathcal{F}) = E$, on en déduit que $E \subset Vect(\mathcal{G})$ et donc $E = Vect(\mathcal{G})$.

□

Exemple. Montrons que $(1, j)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On a $j = e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$. Comme $(1, i)$ engendre $\mathbb{C}$ et que tout élément de $(1, i)$ est combinaison linéaire des éléments de $(1, j)$ puisque :

$$1 = 1.1 + 0.j \quad \text{et} \quad i = \frac{1}{\sqrt{3}}.1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.j$$

3.3 Bases

Définition.

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base de** E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Propriété 19

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

Preuve. L'existence d'une décomposition équivaut à dire que $\mathcal{B}$ est génératrice de E. L'unicité équivaut à la liberté de $\mathcal{F}$. $\square$

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- On appelle coordonnées de x en base $\mathcal{B}$ l'unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
- On appelle matrice colonne de x en base $\mathcal{B}$ et on note $M_{\mathcal{B}}(x)$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ des coordonnées de x en base $\mathcal{B}$.

Exemple. $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et préciser les coordonnées d'un vecteur $v = (x,y,z)$ dans cette base.

Base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_i = (0,\dots,0,\underset{i^{eme} \text{ position}}{1},0,\dots,0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_n = (0,0,\dots,0,1)$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indice (i,j) : $E_{i,j}$ est la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i,j).
La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dite base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base (dite base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$).

Propriété 20

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $(e_1, \dots, e_p) \in F^p$ et $(f_1, \dots, f_q) \in G^q$ des familles de vecteurs de F et G.

(1) Si $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_q)$ sont libres et si $F+G$ est directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est libre.

(2) Si $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_q)$ sont génératrices (de F et G respectivement) et si $F+G = E$, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est génératrice de E.

(3) Si $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_q)$ sont des bases de F et G respectivement et si $F \oplus G = E$, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de E. Cette base est dite **adaptée à la somme directe** $E = F \oplus G$.

Preuve.

(1) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0.$$

On a donc :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j}_{\in G} \underbrace{\Rightarrow}_{F \cap G = \{0\}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0$$

On en déduit que $\lambda_i = 0 = \mu_j$ pour tout i, j car $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_q)$ sont libres.

(2) Puisque $F = Vect(e_1, \dots e_p)$ et $G = Vect(f_1, \dots, f_q)$, on obtient :

$$E = F + G = Vect(e_1, \dots e_p) + Vect(f_1, \dots, f_q) = Vect(e_1, \dots e_p, f_1, \dots, f_q).$$

Donc $(e_1, \dots e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une famille génératrice de E.

(3) Le dernier point vient directement des deux précédents.

□

Exemple. Soient

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = Vect((1, 1, 1)).$$

- Le vecteur $e_3 = (1, 1, 1)$ engendre G et est non nul. Donc (e_3) est une base de G.
- On a montré que $F = Vect(e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1))$. Donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de F. Comme c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est également libre. Ainsi (e_1, e_2) est une base de F.
- On a montré que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. On déduit de la propriété précédente que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 21

Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. Soit $k \in [|1, n|]$ et posons $F = Vect(e_1, \dots, e_k)$ et $G = Vect(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

(1) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre, $F + G$ est directe.

(2) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E, $F + G = E$.

(3) Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, F et G sont supplémentaires dans E.

Preuve.

(1) Soit $x \in F \cap G$. Alors :

$$x \in F \quad \Rightarrow \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k, x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i.$$

$$x \in G \quad \Rightarrow \quad \exists (\mu_{k+1}, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n-k}, x = \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i e_i.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-\mu_i) e_i = 0.$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_i = 0 = \mu_j$ pour tout i, j. Ainsi $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.

(2) Soit $x \in E$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k}_{=:y} + \underbrace{\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n}_{=:z}.$$

On a $y \in F$, $z \in G$ et $y + z = x$. Ainsi $x \in F + G$ et $E = F + G$.

(3) Le troisième point est conséquence de deux précédents.

□