

Analyse asymptotique

1	Relations de comparaison : cas des suites	2
1.1	Relations de domination, de négligeabilité	2
1.2	Relation d'équivalence	3
2	Relations de comparaison : cas des fonctions	5
2.1	Relation de domination, de négligeabilité	6
2.2	Relation d'équivalence	6
3	Développements limités	9
3.1	Généralités	9
3.2	Formule de Taylor-Young et développements limités usuels	13
3.3	Dérivabilité et développement limité	13
3.4	Opérations sur les développements limités	14
4	Applications des développements limités	20
4.1	Recherche de limites et d'équivalents	20
4.2	Étude locale d'une fonction	21
4.3	Application à l'étude d'asymptotes obliques	21

1 Relations de comparaison : cas des suites

Dans cette section :

- les suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- toutes les suites que l'on considère ne s'annulent pas, de sorte que le quotient de deux suites est toujours bien défini.

Les définitions et propriétés qui suivent s'étendent alors à toutes les suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, quitte à tronquer ces suites de leurs premiers termes.

1.1 Relations de domination, de négligeabilité

Définition.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
- la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) (ou que (v_n) est prépondérante devant la suite (u_n)) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Exemples.

- ◆ On a : $\frac{\cos(n) + 4}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $(\cos(n) + 4)$ est bornée.
- ◆ On a : $n^3 \sin(n) = o(n^5)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \sin(n)}{n^5} = \frac{\sin(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarques.

- (u_n) est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$.
- (u_n) converge vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$.
- $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$.

Propriété 1

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites.

- (1) Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$ (transitivité de la relation O).
- (2) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$ (transitivité de la relation o).

Preuve. On démontre le premier point, le deuxième point est analogue. Soit (u_n) une suite telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(t_n)$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a : $\frac{u_n}{t_n} = \frac{u_n}{w_n} \cdot \frac{w_n}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot 0 = 0$. Ainsi, $u_n = o(t_n)$. \square

Propriété 2

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) quatre suites telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- (1) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = O(w_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.
- (2) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(t_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n t_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.

Preuve.

□

Propriété 3 (croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$, et $q > 1$. Alors :

$$q^{-n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\ln^\beta n\right), \quad \ln^\beta n = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(q^n), \quad q^n = o(n!) \quad ; \quad n! = o(n^n)$$

Remarque. En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, on a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n!} \ll q^{-n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Preuve. Toutes ces relations sont des réécritures du théorème de croissance comparée (en notant que $q = e^{\ln(q)}$), sauf $q^n = o(n!)$ avec $q > 1$ et $n! = n^n$.

- Posons $u_n = \frac{q^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. Une récurrence aisée permet alors de montrer que pour tout $n \geq N, 0 \leq u_n \leq \frac{u_N}{2^{n-N}}$. Puisque $\frac{u_N}{2^{n-N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient par théorème d'encadrement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- De même, posons $v_n = \frac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-1} < 1/2$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$. On conclut alors comme précédemment.

□

Exemple. Ainsi on a par croissances comparées :

$$\ln n = o(n), \quad \ln n = o(\sqrt{n}), \quad n = o(2^n)$$

1.2 Relation d'équivalence

Définition.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.

Exemple. On a $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$. En effet, $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et par composition par la fonction racine, continue en 1, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1} = 1$.

Propriété 4

La relation \sim est une relation, d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas, c'est à dire :

- (1) \sim est réflexive : $u_n \sim u_n$;
- (2) \sim est symétrique : $u_n \sim v_n \rightarrow v_n \sim u_n$;
- (3) \sim est transitive : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Preuve.

- (1) Réflexivité : Pour tout $n \geq n_0$, on a : $\frac{u_n}{u_n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_n \sim u_n$.
- (2) Symétrie : Si $u_n \sim v_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et par opération sur les limites, $\frac{v_n}{u_n} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $v_n \sim u_n$.
- (3) Transitivité : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors on a pour tout n , $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_n \sim w_n$.

□

Propriété 5

Soient $(u_n), (v_n)$.

- (1) $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
- (2) $u_n \sim v_n \implies u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Preuve.

- (1) $u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
- (2) Si $u_n \sim v_n$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 donc bornée. De plus, comme $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 alors $\frac{u_n}{v_n}$ donc u_n est non nulle à partir d'un certain rang et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 donc $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.

□

Propriété 6

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors on a :

- (1) $u_n v_n \sim w_n t_n$;
- (2) $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}$;
- (3) $\forall p \in \mathbb{N}, u_n^p \sim w_n^p$.

Preuve. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n w_n}{v_n z_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par produit de limites, d'où le premier point.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{z_n}} = \frac{u_n z_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \left(\frac{z_n}{w_n}\right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

comme quotient de limites. Ainsi on a le second point.

Enfin, pour n et $p \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_n^p}{v_n^p} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1^p = 1$ par opérations sur les limites. D'où le troisième point.

□

Exemple. Montrons que $\binom{n}{6} \sim \frac{n^6}{720}$.

En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, on a $n - j \sim n$; par conséquent :

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^5 (n - j) \sim \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^5 n = \frac{n^6}{720}$$

IMPORTANT.

- On ne peut ni ajouter, ni soustraire, les équivalents, comme le montre l'exemple suivant :

$$n + 1 \sim n + 2 \text{ et } -n \sim -n \text{ mais on n'a pas } 1 \sim 2.$$

- On ne compose pas les équivalents : si f est une fonction (même continue sur \mathbb{R}) et si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$ comme le montre l'exemple suivant :

si $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$ et $f = \exp$, on a $u_n \sim v_n$, mais :

$$\frac{f(u_n)}{f(v_n)} = e^{n^2+n-n^2} = e^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ donc } f(u_n) \not\sim f(v_n).$$

- Lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant : on a $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1$ (puisque grâce à la limite classique $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$).

Propriété 7

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff u_n \sim l$$

Preuve. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$ alors (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et on a :

$$\frac{u_n}{l} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{l} = 1. \text{ Donc } u_n \sim l.$$

Réciproquement si $u_n \sim l$, alors puisque $l \neq 0$, $\frac{u_n}{l} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_n = \frac{u_n}{l} \cdot l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. □

Propriété 8

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

(1) u_n et v_n ont même signe strict (> 0 ou < 0) à partir d'un certain rang.

(2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Preuve.

(1) Comme (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc pour $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}. \text{ En particulier pour tout } n \geq N, \text{ on a } \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}, \text{ et } u_n \text{ et } v_n \text{ ont même signe strict.}$$

(2) Supposons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On a $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ par opérations sur les limites.

De même si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l , on a $v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ par opérations sur les limites. □

2 Relations de comparaison : cas des fonctions

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$), \mathcal{D} désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur \mathcal{D} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et supposées non nulles sur $I \setminus \{a\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I \setminus \{a\}$) ;
- si les fonctions sont définies en a , on supposera de plus qu'elles sont continues en a .

Les définitions et propriétés qui suivent s'étendent aux fonctions ne s'annulant pas sur un voisinage épointé de a , quitte à restreindre les fonctions à un intervalle $J \subset I$.

2.1 Relation de domination, de négligeabilité

Définition.

Soient f et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que :

- f est **dominée** par g au voisinage de a si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a . On note alors $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.
- f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

Exemples.

- ◆ $x^2 \sin(x^3) \underset{0}{=} O(x^2)$: en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 \sin(x^3)$ sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\left| \frac{x^2 \sin(x^3)}{x^2} \right| = |\sin(x^3)| \leq 1$.
- ◆ Si $p < q$, $x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q)$ et $x^q \underset{0}{=} o(x^p)$: en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto x^q$ ne s'annulent pas sur $I \setminus \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x^q} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^q}{x^p}$.
- ◆ $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(\sqrt[3]{x})$: en effet pour $I = \mathbb{R}_+^*$, on a par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0$.

Remarque. Pour $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

- f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} O(1)$.
- f converge vers 0 au voisinage de a si et seulement si $f \underset{a}{=} o(1)$.
- $f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$.

Propriété 9

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\beta \underset{+\infty}{=} o(e^{\alpha x}), \quad |\ln x|^\beta \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

2.2 Relation d'équivalence

Définition.

Soient f et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$: en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Remarque.

- Si f est continue en a , on a : $f(x) \underset{a}{\sim} f(a)$ si $f(a) \neq 0$.
- Si f est dérivable en a , on a : $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a)$ si $f'(a) \neq 0$.

- Si $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_q x^q$ ($p \geq q$ est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q.$$

Propriété 10

Soient f et g définies sur \mathcal{D} .

- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{a}{=} o(g(x)).$
- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \implies f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(f(x)).$

Propriété 11

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :

- (1) $\underset{a}{\sim}$ est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$;
- (2) $\underset{a}{\sim}$ est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \implies g \underset{a}{\sim} f$;
- (3) $\underset{a}{\sim}$ est transitive : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ impliquent $f \underset{a}{\sim} h$.

Propriété 12 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g, h, u quatre fonctions définies sur \mathcal{D} . Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$, alors :

- (1) $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)u(x)$;
- (2) $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g(x)}{u(x)}$;
- (3) $\forall p \in \mathbb{N}, f(x)^p \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^p$;
- (4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et si f^α et g^α sont bien définies sur \mathcal{D} , alors $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Preuve.

- (1) On a, pour $x \in \mathcal{D}$, $\frac{f(x)h(x)}{g(x)u(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{u(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ par produit de limites.

- (2) Pour $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{u(x)}} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \left(\frac{h(x)}{u(x)}\right)^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

comme quotient de limites.

- (3) Pour $x \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $\frac{f(x)^p}{g(x)^p} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^p \xrightarrow{x \rightarrow a} 1^p = 1$ par opérations sur les limites.

- (4) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\frac{f^\alpha(x)}{g^\alpha(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}$. Comme $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ donc $e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

□

Propriété 13 (Équivalents classiques au voisinage de 0)

$$\begin{array}{ll}
e^x - 1 \underset{0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \\
\sin x \underset{0}{\sim} x & \tan x \underset{0}{\sim} x \\
\arcsin x \underset{0}{\sim} x & \arctan x \underset{0}{\sim} x \\
shx \underset{0}{\sim} x & thx \underset{0}{\sim} x \\
(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x & \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^* \\
1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} & 1 - ch(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}
\end{array}$$

Preuve. On utilise que si f est dérivable en a , $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$ si $f'(a) \neq 0$. Les résultats s'en suivent, sauf les suivants (qu'on obtient par opérations sur les équivalents) :

$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

car $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $1 + \cos(x) \underset{0}{\sim} 2$. De même, on a :

$$1 - ch(x) = \frac{1 - ch^2(x)}{1 + ch(x)} = -\frac{sh^2(x)}{1 + ch(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

□

Propriété 14 (Composition à droite dans un équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathcal{D} . On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a et que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. Soit ϕ une fonction à valeurs dans \mathcal{D} telle que $\lim_{t \rightarrow b} \phi(t) = a$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a :

$$f \circ \phi(t) \underset{b}{\sim} g \circ \phi(t).$$

Preuve. En utilisant le théorème de composition pour les limites, on peut écrire :

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{f}{g}(\phi(t)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = 1$$

D'où le résultat. □

IMPORTANT. On veillera à ne pas additionner, soustraire ou composer à gauche des équivalents sans justification, car les résultats obtenus sont généralement faux. Par exemple :

- $x + 1 \underset{\pm\infty}{\sim} x + 2$ et $-x \underset{\pm\infty}{\sim} -x$ mais $1 \underset{\pm\infty}{\sim} 2$;
- $x + 1 \underset{\pm\infty}{\sim} x$, mais on n'a pas $\exp(x+1) \underset{\pm\infty}{\sim} \exp(x)$;
- $1 + 2x \underset{0}{\sim} 1 + x$ et $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Exemple. Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit : $\ln(1 + \sin t) \underset{0}{\sim} \sin t \underset{0}{\sim} t$.

En revanche, on ne peut pas déduire directement de $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ que $\ln(1 + \sin t) \underset{0}{\sim} \ln(1+t)$, car alors on compose à gauche les équivalents par $x \mapsto \ln(1+x)$.

Propriété 15

Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telle que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

- (1) Si g est de signe constant (> 0 ou < 0) au voisinage de a , alors f est de même signe strict que g au voisinage de a .
- (2) Si g admet une limite finie ou infinie en a alors f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Preuve.

- (1) On a $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$, donc par définition de la limite, en posant $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in [a - r, a + r] \cap \mathcal{D}$, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$ et pour $x \in [a - r, a + r] \cap \mathcal{D}$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}$, donc $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe strict.
- (2) Supposons que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$, donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ par opérations sur les limites.

□

Exercice. Trouver les limites suivantes quand x tend vers 0 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ln(\cos(x)) \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x^2} (e^{\cos(x)} - e).$$

Pour f : on a $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1))$. Puisque $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$ et que $\cos(x) - 1$ tend vers 0 en 0, on obtient donc par composition des équivalents à droite que $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1$, et par les équivalents usuels $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -x^2/2$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Pour g : On a $g(x) = \frac{e}{x^2} (e^{\cos(x)-1} - 1)$. Puisque $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ et que $\cos(x) - 1$ tend vers 0 en 0, on obtient donc par composition des équivalents à droite que $e^{\cos(x)-1} - 1 \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -x^2/2$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{e}{2}.$$

Exercice. Trouver les limites suivantes quand x tend vers 0 :

$$h(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{\tan^2(x)} \quad ; \quad i(x) = \frac{\ln(1 + \ln(1 + x))}{sh(x)}.$$

3 Développements limités

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un réel appartenant à \bar{I} ($= I \cup \{\text{extrémité de } I\}$), \mathcal{D} désignera I ou $I \setminus \{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur \mathcal{D} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

3.1 Généralités

Définition.

On dit que $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ admet un **développement limité** en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Remarque. On distingue dans ce développement limité :

- sa **partie régulière**, qui est la fonction polynomiale :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^n p_k(x-a)^k.$$

- le reste $o((x-a)^n)$, fonction négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque $x \rightarrow a$, qui s'écrit aussi $(x-a)^n \varepsilon_n(x-a)$ où $\varepsilon_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples.

- ◆ La fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x - x^2 + x^3 \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0. En effet, comme $\ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a $x^3 \ln(1+x) = o(x^3)$, ce qui permet d'écrire :

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

- ◆ La fonction $\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

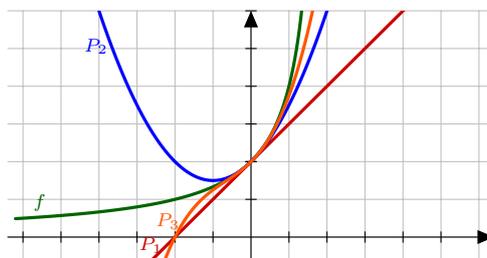
Comme $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \times \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} = o(x^n)$, on obtient que $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

Remarque. Ainsi, la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ peut être approximée localement en 0 par les parties régulières de son développement limité en 0, par exemple à l'ordre 1 (on approxime f par sa tangente en 1), à l'ordre 2 ou 3 par :

$$P_1(x) = 1 + x \quad ; \quad P_2(x) = 1 + x + x^2 \quad ; \quad P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

On représente ses fonctions à l'aide d'une calculatrice :



On constate que les parties régulières ne sont de bonnes approximations de f qu'au voisinage de 0. Un développement limité n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de a , ce qui justifie la notation $\underset{x \rightarrow a}{=}$ dans l'écriture du développement limité.

Propriété 16

Une fonction f admet, au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, un développement limité à l'ordre n si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n . On a de plus :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n)$$

Exemple. Calculons le $DL_3(2)$ de $f(x) = \frac{1}{x}$.

On pose $h = x - 2$. On a alors :

$$f(x) = f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$

On utilise alors le DL en 0 de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ calculé précédemment pour obtenir finalement :

$$f(2+h) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3) \right)$$

et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3).$$

Propriété 17 (Unicité d'un DL)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a , celui-ci est unique.

Preuve. Par l'absurde, supposons que $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$. Soit p le plus petit entier tel que $b_p \neq a_p$. Alors, pour tout $0 \leq k \leq p$, on a $a_k - b_k = 0$. On a $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k = o((x-a)^n)$ et $f(x) - \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k = o((x-a)^n)$. Ainsi, pour tout $x \neq a$:

$$0 = f(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

En divisant par $(x-a)^p$:

$$0 = (a_p - b_p) + (x-a) \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)(x-a)^{k-a-1} + o((x-a)^{n-p}) \xrightarrow{x \rightarrow a} a_p - b_p$$

D'où $a_p = b_p$, ce qui constitue une contradiction. □

Propriété 18 (Troncature d'un DL)

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f admet un développement limité à l'ordre p en a obtenue en tronquant le développement limité à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p).$$

Preuve. Si f admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie régulière est $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$, alors, pour tout $p \leq n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) = \sum_{k=0}^p a_k(x-a)^k + \underbrace{\sum_{k=p+1}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^p)}$$

□

Propriété 19

Si f est paire (resp. impaire) et admet un développement limité à l'ordre n en 0, ce développement limité ne contient que des termes pairs (resp. impairs).

Preuve. Supposons par exemple f paire, et notons

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

son développement limité en 0. On a alors

$$f(x) = f(-x) = a_0 + a_1(-x) + \dots + a_n(-x)^n + o(x^n)$$

car une fonction négligeable devant $(-x)^n$ l'est aussi devant x^n . Par unicité du DL, $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a donc pour tout k impair, $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$. □

Définition.

Soit f admettant un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Notons p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. On appelle forme normalisée de ce développement limité le développement

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_p + a_{p+1}h + \dots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

Propriété 20

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Preuve. Comme pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $a_k = 0$, on a $f(x) = a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, puis

$$\frac{f(x)}{a_p(x-a)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-a) + \dots + \frac{a_n}{a_p}(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

□

Remarque. f est donc du même signe strict que le premier terme non nul de son DL au voisinage de a .

3.2 Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

Propriété 21 (Formule de Taylor-Young)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^n sur I . Alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point a de I qui est

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Remarque.

- On prouvera cette formule dans le chapitre intégration.
- Toute fonction \mathcal{C}^∞ admet donc un développement limité à tout ordre.
- En pratique, cette formule est difficilement applicable pour l'obtention d'un DL, car elle impose de calculer les dérivées successives de f en a .

Exemples.

- \exp est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc admet un développement limité à tout ordre en 0. Comme pour $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

- $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$ donc admet un développement limité à tout ordre en 0. Comme pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Par exemple pour $\alpha = 1/2$ et $-1/2$, on obtient à l'ordre 3 :

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

3.3 Dérivabilité et développement limité

Propriété 22

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , et ce développement limité est alors nécessairement :

$$\forall x \in I, f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

Preuve.

\Rightarrow Supposons f dérivable en a . On pose alors $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ si $x \neq a$, et $\epsilon(a) = 0$. Comme f est dérivable en a , on a $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$, et cette égalité reste évidemment vraie quand $x = a$.

\Leftarrow Supposons que f admette un développement limité à l'ordre 1 en a . On a alors $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = b + (x-a)c + (x-a)\epsilon(x)$. En passant à la limite quand $x \rightarrow a$, on trouve que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, donc f est continue en a et $b = f(a)$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$. Ainsi f est dérivable en a et $c = f'(a)$.

□

Remarque. Soit f est une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ admettant un développement limité à l'ordre 1 en a de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o((x - a))$. Alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$;
- le prolongement par continuité de f en a est dérivable en a , et $f'(a) = a_1$.

Exercice. Étudier $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ au voisinage de 0.

On va montrer que f admet un $DL_1(0)$. Pour cela on doit prendre un $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^x$:

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2/2 + o(x^2).$$

D'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x/2 + o(x^2).$$

Ainsi f a un $DL_1(0)$. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Elle est également dérivable en 0 et $f'(0) = 1/2$.

Remarque. Ce résultat ne se généralise pas pour des développements limités d'ordre supérieur.

Exemple. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

Comme la fonction \sin est bornée, il est clair que l'on a :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o(x^2).$$

Ainsi, f admet le développement limité à l'ordre 2 en 0 suivant : $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$.

- f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* , et on a :

$$f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x).$$

- D'après la remarque précédente, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
- f n'est pas deux fois dérivable en 0 car :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin(1/x) - \cos(1/x) \text{ n'a pas de limite en } 0.$$

3.4 Opérations sur les développements limités

Remarque. On l'a dit, la formule de Taylor-Young est difficile à appliquer en pratique pour obtenir un DL, car elle impose de calculer les dérivées successives de la fonction. On présente dans cette section des résultats permettant d'obtenir des DL à partir de DL connus :

- par intégration de DL ;
- par opérations (combinaison linéaire, produits,...) sur les DL.

Intégration d'un développement limité

Propriété 23

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^n sur I , elle admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors ses primitives F ont des développements limités à l'ordre $n + 1$ en 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Preuve. Une primitive F de f est de classe \mathcal{C}^{n+1} et la formule de Taylor-Young donne :

$$\begin{aligned} F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} F^{(k)}(0) + o(x^{n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k-1)}(0) + o(x^{n+1}) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(0) + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

□

Exemple. À partir du $DL_n(0)$:

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

on retrouve des développements limités classiques par intégration :

- en primitivant le DL de $\frac{1}{1+x}$, on obtient :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- On a $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$, d'où en primitivant,

$$\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Combinaison linéaire, produit

Propriété 24

Supposons que f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q_n(x) + o(x^n).$$

(1) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n).$$

(2) Le produit fg a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

où $T_n(PQ)$ désigne la troncature à l'ordre n du polynôme PQ .

Preuve.

(1) On a :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n).$$

C'est le $DL_n(0)$ de $\lambda f + \mu g$ car $\lambda P_n + \mu Q_n$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

(2) On a par produit des développements limités :

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (P_n(x) + o(x^n))(Q_n(x) + o(x^n)) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)$$

car $P_n(x)o(x^n) + Q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n)$ est négligeable devant x^n en 0.

On sait que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_n Q_n)(x) + x^{n+1}R_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale. On en déduit que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_n Q_n)(x) + o(x^n)$ et donc :

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(P_n Q_n)(x) + o(x^n)$$

qui est le $DL_n(0)$ de fg car $T_n(P_n Q_n)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

□

Exemple.

◆ Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto shx - \sin x$:

$$shx - \sin x = x + \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

◆ Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos x \sin x$:

$$\cos x \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

◆ Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

D'où par produit :

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right),$$

ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x + x) + \left(\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\right) + o(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Remarque. Si on multiplie un DL à l'ordre p avec un DL à l'ordre n , la précision finale est $\min(n, p)$.

Exercice. Déterminer le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \cos(x)ch(x)$.

Solution : $\cos(x)ch(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)$.

Composition

Propriété 25

Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ ont des développements limités en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad ; \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n),$$

si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, alors la composée $g \circ f$ a un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$g \circ f(x) = T_n(Q_n \circ P_n)(x) + o(x^n).$$

Preuve. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, on peut factoriser dans le DL de f en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = x(P_{n-1}(x) + o(x^{n-1})).$$

On substitue dans $g \circ f(x) = \sum_{k=0}^n q_k(f(x))^k + (f(x))^n \varepsilon_g(f(x))$ le DL de f :

$$g \circ f(x) = \sum_{k=0}^n q_k(P_n(x) + o(x^n))^k + x^n(P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x)).$$

On regarde à présent chaque terme de cette expression :

- $(P_n(x) + o(x^n))^k$: en développant par la formule du binôme, on a un terme en $(P_n(x))^k$ et tous les autres termes contiennent $o(x^n)$ et sont négligeables devant x^n . Ainsi, on a :

$$(P_n(x) + o(x^n))^k = (P_n(x))^k + o(x^n).$$

- $x^n(P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x))$: on a $\lim_{x \rightarrow 0} (P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x)) = 0$, donc :

$$x^n(P_{n-1}(x) + o(x^{n-1}))^n \varepsilon_g(f(x)) = o(x^n).$$

Finalement, on obtient que :

$$g \circ f(x) = \sum_{k=0}^n q_k(P_n(x))^k + o(x^n) = Q_n \circ P_n(x) + o(x^n).$$

Et comme $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + x^{n+1}R_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale, on en déduit que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n)$ et donc :

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q_n \circ P_n)(x) + o(x^n).$$

C'est bien le $DL_n(0)$ de fg car $T_n(P_nQ_n)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$. □

Exemple. Déterminons le $DL_4(0)$ de $x \mapsto f(x) = (1+x)^x$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = e^{x \ln(1+x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1+x) = 0$. On utilise la composition des DL.

Le développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto x \ln(1+x)$ s'écrit :

$$x \ln(1+x) \underset{0}{=} x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = \underbrace{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_{=u(x)}.$$

On a $u(x)^2 = x^4 + o(x^4)$, $u(x)^3 = o(x^4)$. Il suffit donc de faire le $DL_2(0)$ de l'exponentielle :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

On obtient en substituant :

$$(1+x)^x \underset{0}{=} 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} \right) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

Exemple. Calculons le $DL_4(0)$ de $x \mapsto g(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

On fait le développement limité de \sin à l'ordre 5 (car on divise par x ce DL). On obtient :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \underbrace{\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}_{=u(x)}.$$

On a $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. On peut donc composer les DL. On a :

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

De plus, $u^2(x) = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$ et $u^3(x) = o(x^4)$. Donc en substituant, on obtient :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180}.$$

Exercice. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$.

Solution : $e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \right)$.

Exercice. Déterminer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto h(x) = \sqrt{3 + \sqrt{1 + 2x}}$.

Solution : $\sqrt{3 + \sqrt{1 + 2x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{x}{4} - \frac{9x^2}{64} + \frac{73x^3}{512}$.

Quotient de DL

Propriété 26

Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$.

Si f et g ont des développements limités à l'ordre n en 0 et si g admet une limite finie non nulle en 0, alors f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Preuve. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = l \neq 0$, il existe un intervalle J contenant 0 et inclus dans I sur lequel g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \cap J$, et la fonction f/g , définie sur $\mathcal{D} \cap J$.

Écrivons $g(x) = l(1 + u(x))$ (où $u(x) = \frac{g(x) - l}{l}$). On a alors :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1 + u(x)} \times \frac{f(x)}{l}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ et que u admet un $DL_n(0)$ (car c'est le cas pour g), on en déduit que $x \mapsto \frac{1}{1 + u(x)}$ admet un $DL_n(0)$ par composition des $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1 + x}$ et de $x \mapsto u(x)$. On obtient ainsi le $DL_n(0)$ de f/g en multipliant le $DL_n(0)$ ainsi obtenu avec celui de f . \square

► Pour faire le DL en 0 d'un quotient $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ avec $\lim_0 g \neq 0$, on se ramènera toujours (comme dans la preuve précédente) à un développement limité d'une fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{1 + u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Exemples.

◆ Déterminons le $DL_5(0)$ de \tan .

$$\tan x = \frac{\sin x}{\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{=u(x)}} = \sin x \times (1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + u(x)^4 - u(x)^5 + o(x^5)).$$

On a $u(x)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$, $u(x)^3 = o(x^4)$. D'où en substituant :

$$\begin{aligned} \tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} & \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \right) \\ & = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \right) \\ & = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o(x^5) \\ & = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \end{aligned}$$

◆ Déterminons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

On a $1 + e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$. On écrit alors :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2+(e^x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1-e^x}{2}}.$$

Posons $u : x \mapsto \frac{1-e^x}{2}$. On fait le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$. On a :

$$\frac{1}{1+u(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + o(x^3)$$

avec

$$u(x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3); \quad u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3); \quad \text{et} \quad u(x)^3 = -\frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u(x)} &= 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}\right) + \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8}\right) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{1+e^x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3).$$

Exercice. Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}$.

Solution : $\frac{1}{1+\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.

Remarque. Si g tend vers 0, il est encore possible que la fonction $\frac{f}{g}$ possède un développement limité : si f et g admettent des $DL_n(0)$ de formes normalisées :

$$f(x) = x^{n_1} (a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \dots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1}))$$

$$g(x) = x^{n_2} (b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \dots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2}))$$

avec $a_{p_1}, b_{p_2} \neq 0$, alors le quotient s'écrit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p_1-p_2} \underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \dots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1})}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \dots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2})} \right)}_{=h(x)}$$

Comme $b_{p_2} \neq 0$, la proposition précédente, assure que la fonction h possède un développement limité. De plus, le terme constant du développement limité de la fonction h vaut $\frac{a_{p_1}}{b_{p_2}}$ donc est non nul. Par suite $\frac{f}{g}$ admet un développement limité si et seulement si $p_1 - p_2 \in \mathbb{N}$, c'est à dire $p_2 \leq p_1$, et son ordre est $\min(n_1 - p_1, n_2 - p_2)$.

Exemple. Déterminer, s'il existe, le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

• *Prédiction de l'ordre des DL à choisir (au brouillon) :*

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots} = \frac{x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \dots \right)}{x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots \right)} = x \times \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \dots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots} \right]}_{=h(x)}$$

Pour obtenir le $DL_3(0)$ de f , il faut donc le $DL_2(0)$ de h ce qui nécessite un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur de h . Cela nécessite donc un $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^x - 1 - x$ (on a factorisé par x^2) et un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ (on a factorisé par x).

- *Rédaction :*

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

ou sous forme normalisée :

$$e^x - 1 - x = x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) \right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)$$

On obtient l'écriture suivante :

$$f(x) = x \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) \right) \times \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}_{=u(x)}}$$

Comme on a :

$$u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2),$$

on obtient :

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{1}{1 - u(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

Pour obtenir le développement limité de f cherché, il reste à calculer le produit :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) \right) \times \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6} \right) + \left(-\frac{x^2}{24} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{24} \right) + o(x^2) \right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \end{aligned}$$

4 Applications des développements limités

4.1 Recherche de limites et d'équivalents

Rappel. Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle. On écrit sa forme normalisée :

$$f(x) = (x-a)^p (a_p + a_{p+1}(x-a) + \dots + a_{n-p}(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p})).$$

Alors on a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p (x-a)^p$

Exemple.

- ◆ Déterminons un équivalent au voisinage de 0 de $\frac{\sin(2x) - sh(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2}$.

Cherchons un équivalent du numérateur :

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad sh(2x) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

ce qui donne : $\sin(2x) - sh(2x) \sim -\frac{8}{3}x^3$.

Cherchons un équivalent du dénominateur.

$$\begin{aligned} 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

On en déduit par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{\sin(2x) - sh(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2} \sim \frac{-\frac{8}{3}x^3}{\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^2} \sim -\frac{96}{x^3}$$

◆ Étudions la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^5 x}$.

On sait que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

On en déduit :

$$3 \sin x - x \cos x - 2x \sim -\frac{1}{60}x^5 \quad \text{et} \quad \sin^5 x \sim x^5,$$

puis :

$$\frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^5 x} \sim -\frac{\frac{1}{60}x^5}{x^5} \sim -\frac{1}{60}$$

ce qui nous donne que la limite cherchée vaut $-\frac{1}{60}$.

◆ Déterminer la limite en 1 de $x \mapsto \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$.

On se ramène en 0 en posant $t = x - 1$ et on cherche un équivalent du numérateur :

$$\ln(x) - x + 1 = \ln(1+t) - t = \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Il en résulte que $\ln(1+t) \sim_0 -t^2/2$, et la limite cherchée est donc $-1/2$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

4.2 Étude locale d'une fonction

Rappel. Si f admet un $DL_1(a)$, f est dérivable en a et la courbe représentative de f admet une tangente en a .

► Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à sa tangente, on cherche un équivalent de $x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$ en a en effectuant un DL de f :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \sim_a a_p(x-a)^p \quad \text{avec} \quad a_p \in \mathbb{R}^* \text{ et } p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Alors $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

- si p est pair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a . La courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p).
- si p est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en a . La courbe traverse sa tangente en a . On parle de **point d'inflexion**.

Remarque. Dans le cas d'un point critique a , c'est à dire si $f'(a) = 0$, cette étude nous dit si on a un extremum local (si n pair) ou non (si n est impair).

Exemple. Soit $f : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$. f admet le $DL_3(0)$ suivant :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + o_0(x^3).$$

Ainsi f est dérivable en 0, et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Comme $f(x) + \frac{1}{2}x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24}x^3$, qui change de signe en 0, la courbe représentative de f traverse sa tangente en 0. Ainsi f admet un point d'inflexion en 0.

4.3 Application à l'étude d'asymptotes obliques

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\pm\infty$. On dit que f possède un $DL_n(\pm\infty)$ si la fonction $g : u \rightarrow f(1/u)$ possède un $DL_n(0)$.

Exemple. Calculons le $DL_2(\infty)$ de $f : x \mapsto \frac{x}{x-1}$.

On pose $u = \frac{1}{x}$. Alors $g(u) = \frac{1}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$ et on en déduit le $DL_2(\infty)$ de f :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 en $\pm\infty$.

► Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$. On souhaite préciser son comportement en $+\infty$, en étudiant l'existence éventuelle d'une asymptote oblique et sa position relative par rapport à \mathcal{C}_f . Pour cela, on procédera comme suit :

- On effectue un $DL_2(+\infty)$ de $\frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- En multipliant par x , il vient $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o(1/x)$. La courbe admet alors la droite $y = a_0x + a_1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
- La position de la courbe de f par rapport à l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\frac{a_2}{x}$ (si $a_2 = 0$, on augmente l'ordre du DL jusqu'à trouver un coefficient non nul).

Remarque. La relation $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est appelée **développement asymptotique** de f au voisinage de l'infini à la précision $\frac{1}{x}$.

Exemple. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Déterminons l'asymptote éventuelle de f en $+\infty$.

On pose $u = \frac{1}{x}$ et on étudie $\frac{f(x)}{x} = uf(u^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$ (on recherche l'asymptote en $+\infty$, donc $0 < u < 1$). On effectue le $DL(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o_0(u^2).$$

Donc on obtient $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}(x^{-1})$. La droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et le graphe de f est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (car $f(x) - x - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{8x} > 0$).