Chapitre 14

Dérivabilité

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)

mansuy.mathieu@hotmail.fr

1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point

1.1 Définition de la dérivabilité

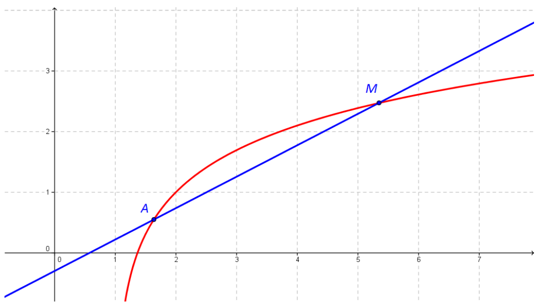
Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a :

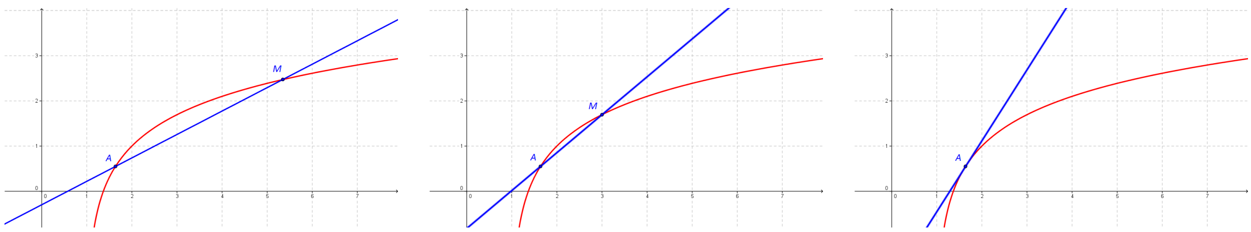
$$\begin{array}{rccc} \tau_a(f) : & I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est le nombre dérivée de f en a. Il est noté $f'(a)$ ou $D(f)(a)$.

Interprétation géométrique. Fixons $a \in I$ et considérons $x \in I$, $x \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ un point distinct de A appartenant à la courbe représentative de f. Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la corde (AM).



Par définition, f est dérivable en a si et seulement si le coefficient directeur de la droite (AM) admet une limite quand x tend vers a.



Dans ce cas, la position limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Si $\tau_a(f)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative de f admet en $(a, f(a))$ une tangente verticale.

Exemples. ♦ Soit $f : x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $n = 0$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, donc f est dérivable en a de dérivée nulle.
Si $n \neq 0$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k} \underset{x\to a}{\longrightarrow} na^{n-1}$, donc f est dérivable en a de dérivée na^{n-1}.
♦ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+\setminus\{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}$. $\sqrt{\ }$ est donc dérivable en a, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
♦ La fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est **dérivable à droite** ou **dérivable à gauche** en a si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite ou à gauche en a. Si elles existent, on note alors ces limites $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, appelées dérivées à droite ou à gauche de la fonction f en a.

Propriété 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ces conditions, on a :$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque. Si $a \in I$ est l'extrémité supérieure de I, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a.

Exemple. On a $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} \to \begin{cases} 1 \text{ si } x \to 0^+ \\ -1 \text{ si } x \to 0^- \end{cases}$. La fonction $|\ |$ est donc dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées à gauche et à droite égales à -1 et 1. Elle n'est par contre pas dérivable en 0.

Définition.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en chaque point de I. On définit alors la fonction dérivée de f notée f', par : $\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$.

Définition.

On dit qu'une fonction f définie sur I admet un **développement limité à l'ordre 1 en** a s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + (x - a)a_1 + (x - a)\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Propriété 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x).$$

Preuve.

$\Rightarrow$ Supposons f dérivable en a. On pose alors $\epsilon : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ si $x \neq a$, et $\epsilon(a) = 0$. Comme f est dérivable en a, on a $\epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Pour $x \in I \backslash \{a\}$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$, et cette égalité reste évidemment vraie quand $x = a$.

$\Leftarrow$ Supposons que f admette un développement limité à l'ordre 1 en a. On a alors $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = b + (x - a)c + (x - a)\epsilon(x)$. En passant à la limite quand $x \to a$, on trouve que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, donc f est continue en a et $b = f(a)$. Pour $x \in I \backslash \{a\}$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} c$. Ainsi f est dérivable en a et $c = f'(a)$.

□

Propriété 3

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. On sait que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a : il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ et pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon(x)$. En prenant la limite de cette expression quand x tend vers a, on obtient : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a. □

Remarque. La réciproque est fausse: une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, les fonctions valeur absolue ou racine carrée sont continues en 0 et non dérivable en 0.

Exercice. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \begin{cases} |x|^a \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$ $(a > 0)$.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 4

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$, alors :

(1) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

(2) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(3) Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Preuve.

(1) Soit $x \in I\backslash\{a\}$. Alors

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

donc $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a de dérivée $(\lambda f + \mu g)'(a)$.

(2) Soit $x \in I\backslash\{a\}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\end{aligned}$$

avec $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a)$ car g dérivable donc continue en a. Ainsi fg est dérivable en a, de dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(3) Comme g est dérivable en a, elle y est continue, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a) \neq 0$. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in V = I \cap [a-r, a+r]$, $g(x) \neq 0$. Pour $x \in V\backslash\{a\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \times \frac{g(a)}{g(x)g(a)} - \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \times \frac{f(a)}{g(x)g(a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\end{aligned}$$

et $\frac{f}{g}$ est dérivable en a de dérivée $\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

□

Propriété 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en $a \in I$ et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Preuve. Soit donc $a \in I$, $b = f(a) \in J$. Il existe $\epsilon_1 : I \to \mathbb{R}$, $\epsilon_2 : J \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_a \epsilon_1 = \lim_b \epsilon_2 = 0$ et

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon_1(x),$$

$$\forall y \in J, \quad g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)\epsilon_2(y).$$

Alors pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(b) + (f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon_1(x) - b)g'(b) + (f(x)-b)\epsilon_2(f(x)) \\ &= g(b) + (x-a)f'(a)g'(b) + \underbrace{g'(b)(x-a)\epsilon_1(x) + (f(x)-b)\epsilon_2(f(x))}_{=:\epsilon_3(x)} \end{aligned}$$

On a $\lim_a \epsilon_3 = 0$. $g \circ f$ admet donc un développement limité d'ordre 1 en a. Ainsi $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$. □

Propriété 6 (Dérivabilité de la fonction réciproque)

Soient $a \in I$, $f : I \to J$ une fonction continue, strictement monotone sur I et dérivable en a. Alors,

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \text{ si, et seulement si,} f'(a) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Preuve.

- Supposons f^{-1} dérivable en b. La formule donnant la dérivée d'une composée, appliquée à $f^{-1} \circ f$ donne $\left(f^{-1}\right)'(b)f'(a) = 1$, ce qui impose $f'(a) \neq 0$.
- Supposons $f'(a) \neq 0$. Soit $y \in J \backslash \{b\}$. Puisque f^{-1} est injective de J dans I et que $y \neq b$, on a $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ donc $f^{-1}(y) \neq a$. Ainsi,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$

La fonction f est continue, strictement monotone sur l'intervalle I non vide et non réduit à un point, donc la fonction f^{-1} est continue sur l'intervalle $J = f(I)$. Par composition des limites, à l'aide de la dérivabilité de f en a, on a :

$$\frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \underset{y \to b}{\longrightarrow} f'(a),$$

et puisque $f'(a) \neq 0$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} \underset{y \to b}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Exemple. C'est grâce à ce théorème qu'on avait prouvé que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

2.1 Définitions

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On définit récursivement les dérivées successives de f par :

- pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Si, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I, et on appelle $f^{(n)}$ **la dérivée** n^{ieme} **de** f **sur** I. Enfin, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur I si f est n-fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition.

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I. On dit que :

- $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.
- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^n(I)$ les fonctions de classes $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I, et $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I
- f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
- On a la suite d'inclusions strictes : $\mathcal{C}^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}^n(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}^1(I) \subsetneq \mathcal{C}^0(I)$.

Remarque. Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est dérivable, mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \mapsto x^2 \cos \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$. En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions qui le sont, et pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \cos \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc f est dérivable en 0, de dérivée nulle.
Mais f' n'est pas continue en 0 puisque $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$: en effet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2\pi(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 alors que $f(x_n) = \frac{1}{\pi(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(y_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemples. On vérifie par récurrence les résultats suivants :

- Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- cos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.
  sin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$.

2.2 Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^k$

Propriété 7

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(f, g) \in (\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Preuve. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: Si f et g sont $\mathcal{C}^n$, alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
Pour $n = 0$, on a vu dans le chapitre précédent que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et g sont $\mathcal{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence, $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$. Comme $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont $\mathcal{C}^1$ (car f et g $\mathcal{C}^{n+1}$), $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$ est dérivable (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont) de dérivée $(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$ continue. Ainsi $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ et on a $\mathcal{P}(n + 1)$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Propriété 8 (Formule de Leibniz)

Soient $n \in \mathbb{N}$, f, $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: Si f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur I , alors fg est $\mathcal{C}^n$ sur I et $(fg)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I et $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg = (fg)^{(0)}$, donc on a $\mathcal{P}(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et g sont $\mathcal{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence fg est $\mathcal{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Pour $k \in [|0, n|]$, $f^{(k)}$ est $\mathcal{C}^{n+1-k}$ donc $\mathcal{C}^1$ donc dérivable et $g^{(n-k)}$ est $\mathcal{C}^{k+1}$ donc $\mathcal{C}^1$ donc dérivable. Ainsi $(fg)^{(n)}$ est dérivable comme produits et combinaison linéaire de fonctions qui le sont. On a alors :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \text{par changement d'indice} \\
&= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \text{par la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

et pour $k \in [|0, n + 1|]$, $f^{(k)}$ est $\mathcal{C}^{n+1-k}$ donc continue, $g^{(n+1-k)}$ est $\mathcal{C}^k$ donc continue. Ainsi $(fg)^{(n+1)}$ est continue comme produits et combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Ainsi fg est $\mathcal{C}^{n+1}$ et on a $\mathcal{P}(n + 1)$.
On conclut par principe de récurrence. □

Exercice. Posons $f(x) = x^n(1 + x)^n$. En calculant de deux façons différentes le terme dominant de $f^{(n)}$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Par la formule de Leibniz, on obtient que le coefficient du terme de plus haut degré est $\displaystyle n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Or le terme de plus haut degré dans $f(x)$ est x^{2n}, et donc le coefficient de ce terme dans $f^{(n)}(x)$ est $\dfrac{(2n)!}{n!}$.

Ainsi on obtient la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Propriété 9

Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathcal{C}^n$ sur I.

Propriété 10

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^n$ sur I telles que $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Propriété 11

Soit $f : I \to J$ bijective, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et telle que f' ne s'annule pas. Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Exemples.

- La fonction arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions arcsin et arccos sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

3 Propriétés des fonctions dérivables

3.1 Extremum local

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

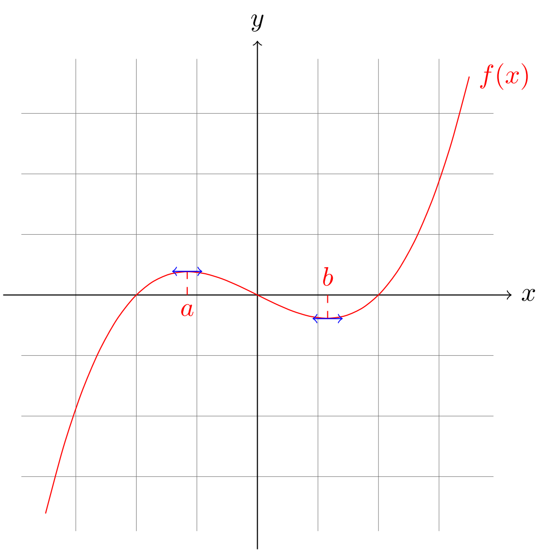
- On dit que f admet une maximum local en a, s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un maximum en a, i.e :

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta],\ \ f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f admet une minimum local en a, s'il existe un réel $\eta > 0$ (eta) tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un minimum en a, i.e :

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta],\ \ f(a) \leq f(x)$$

- On dit que f admet un extremum local en a, si f admet un maximum ou un minimum local en a.



f admet ici des extrema locaux (et non globaux) en a et b.

Propriété 12 (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en un point a intérieure à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a)$.

Preuve. Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I,\ f(x) \leq f(a)$. Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$. Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta],\ f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in [a-\delta, a[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^-$ (comme f est dérivable en a), $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$.
De même, pour tout $x \in]a, a+\delta]$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (car $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a > 0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^+$, $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$.
Ainsi, $f'(a) = 0$. □

Remarques.

- La condition $f'(a) = 0$ n'implique pas qu'il y ait un extremum local en a.
  Par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0.
- L'hypothèse a intérieur à I est essentielle : par exemple, la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto [0,1]$ est dérivable sur $[0,1]$ et a son minimum en 0 et son maximum en 1, mais $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

► *Pour déterminer les extrema d'une fonction f, on procèdera comme suit :*

- *on étudie les extrema en les points intérieurs à I : on résout l'équation $f'(x) = 0$, puis on vérifie si les points obtenus correspondent ou non à des extrema locaux (avec le tableau de variations de f par exemple).*
- *on étudie si les extrémités de I (si elles appartiennent à I) correspondent ou non à des extrema locaux de f.*

Exemple. Étudier les extrema de $f : x \in [0,1] \mapsto (x(x-1)^2)^{1/3}$.

f est définie sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Pour $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x(x-1)^2)^{-2/3}((x-1)^2 + 2x(x-1)) = \frac{1}{3}(x-1)(3x-1)(x(x-1)^2)^{-2/3}.$$

On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{3}$. Donc si f admet un extremum sur l'intervalle $]0,1[$, c'est nécessairement en $x = 1/3$.

On sait que f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc bornée et atteint ses bornes. On a de plus $f(0) = f(1) = 0$ et pour $x \in]0,1[$, $f(x) > 0$. Donc f admet son minimum en 0 et en 1 et admet un maximum en un point de $]0,1[$, qui est nécessairement $\frac{1}{3}$.

3.2 Théorème de Rolle

Théorème 13 (Théorème de Rolle)

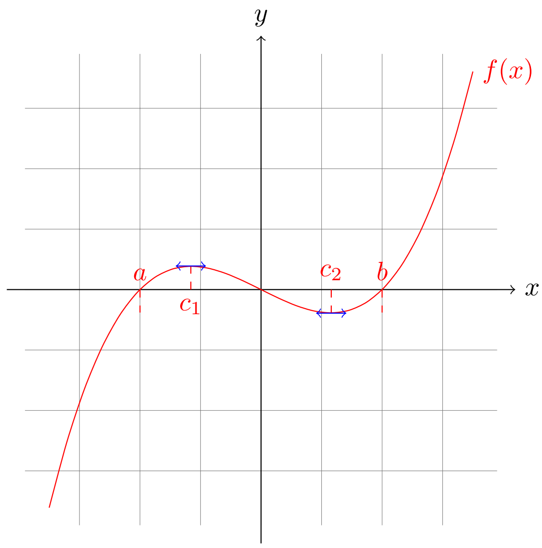
Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve. f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes : on a $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

- Si $c \in \{a,b\}$ et $d \in \{a,b\}$. Comme $f(a) = f(b)$, $f(c) = f(d)$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d) = f(c)$ donc $f(x) = f(c)$. f est alors constante, et en tout $c \in]a,b[$, on a $f'(c) = 0$.
- Sinon $c \in]a,b[$ ou $d \in]a,b[$, f admet en ce point un extremum local, et y est dérivable, donc sa dérivée s'y annule d'après la proposition précédente.

□

Remarque. En général, l'élément $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ n'est pas unique, comme dans l'exemple suivant :



Exercice. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$, et que f est n-fois dérivable sur $[a, b]$.

a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a, b[$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Solution.

a) Soit $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n+1}$ des points distincts de I sur lesquels f s'annule. Or, pour tout $k \in [|1, n|]$, f est continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $f'(\beta_k) = 0$.
Enfin, puisque $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$, les n β_k ($k \in [|1, n|]$) sont deux à deux disjoints, ce qui permet de conclure

b) On montre par récurrence sur $k \in [|1, n|]$ la propriété $\mathcal{P}(k)$: $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur $]a, b[$.
On a $\mathcal{P}(1)$ vraie d'après la question précédente.
Soit $k \in [|1, n - 1|]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur $[a, b]$, disons en $r_1 < \cdots < r_{n+1-k}$. Pour $i \in [|1, n - k|]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[r_i, r_{i+1}]$, dérivable sur $]r_i, r_{i+1}[$ (car f est n-fois dérivable sur $[a, b]$) et $f^{(k)}(r_i) = 0 = f^{(k)}(r_{i+1})$, donc par le théorème de Rolle, il existe $s_i \in]r_i, r_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(s_i) = 0$. Comme $a < s_1 < \cdots < s_{n-k} < b$, on a montré que $f^{(k+1)}$ s'annule au moins $n - k$ fois sur $]a, b[$, ainsi $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie .
En conclusion, $\forall k \in [|1, n|]$, $\mathcal{P}(k)$ vraie. En particulier $\mathcal{P}(n)$, et $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$, donc on a $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

3.3 Egalité des accroissements finis et applications

Théorème 14 (Égalité des accroissements finis)

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Interprétation géométrique : Le théorème des accroissements finis signifie que si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe (au moins) une tangente à son graphe qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Interprétation cinétique : Considérons un point mobile se déplaçant sur un axe et supposons que la position soit une fonction dérivable du temps. Ce théorème nous dit qu'il existe un instant c où la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne sur le trajet $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Preuve. Posons $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(a) - K(x - a)$, avec $K \in \mathbb{R}$. g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = 0$. Fixons alors $K \in \mathbb{R}$ tel que $g(b) = 0$: $g(b) = 0 \Leftrightarrow K = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $(a \neq b)$.
Par le théorème de Rolle appliqué à g, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Alors $f'(c) - K = 0$, donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, puis $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Fonctions monotones

Propriété 15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

(1) f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

(2) f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur I.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ Immédiat.

$\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soir $x, y \in I$, $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.

(2) On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).

$\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. En faisant tendre x vers a, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.

$\Leftarrow$ Supposons f' à valeurs positives. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. Par le théorème des accroissements finis (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ car $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$. Ainsi $f(y) \geq f(x)$ et f est croissante.

□

Remarques.

- Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I, le raisonnement précédent montre qu'alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.
- La réciproque est cependant fausse : une fonction f strictement croissante sur I ne satisfait pas nécessairement $f' > 0$ sur I, comme le montre la fonction $f(x) = x^3$ (strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $f'(0) = 0$). On a en revanche le résultat suivant utile en pratique.

Propriété 16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Preuve. Par l'absurde, si f n'est pas strictement croissante, alors il existe $c < d$, $c, d \in I$, tels que $f(c) = f(d)$. Comme f est croissante, on a donc $f_{[c,d]}$ constante et alors f' est nulle sur le segment $[c, d]$. C'est en contradiction avec l'hypothèse de départ, donc f est strictement croissante. □

Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 17 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$. Si $f' : I\backslash\{a\}$ admet une limite l (finie ou infinie) quand $x \to a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.
En particulier si l est finie, f est dérivable en a et f' est continue en a et donc $f'(a) = l$.

Preuve. On démontre la proposition lorsque $l = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ est finie (la preuve est identique si $l = \pm\infty$). Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists\delta > 0,\ \forall x \in I\backslash\{a\},\quad |x-a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f'(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in I\backslash\{a\}$ tel que $|x - a| \leq \delta$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f entre a et x (f continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$), dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$)) :

$$\exists c_x \in]a, x[\text{ (ou }]x, a[), \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Or $|c_x - a| \leq |x - a| \leq \delta$, et donc :

$$|f'(c_x) - l| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, c'est à dire f est dérivable en a. □

Remarques.

- Si $l = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en a.
- Si f est continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\backslash\{a\}$ et si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = l$.

Exemple. Fonctions puissances. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction puissance d'exposant α, notée p_α, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

La fonction p_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Si $\alpha > 0$, nous avons vu que p_α est prolongeable par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} p'_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ +\infty \text{ si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$. Par le théorème de passage à la limite sur la dérive, on en déduit que :

- si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0, et sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 ;
- si $\alpha > 1$, p_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $p'_\alpha(0) = 0$.

Exemple. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2 \ln x$. Montrons que f peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. On peut donc prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\tilde{f}(0) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{f}'(x) = 2x \ln x + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée), donc $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et $\tilde{f}'(0) = 0$ par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.

3.4 Inégalité des accroissements finis et applications

Propriété 18 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. S'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
2. S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Preuve. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

1. Comme $b - a > 0$ et comme $m \leq f'(c) \leq M$, on a le résultat.
2. $|f(b) - f(a)| = |b - a| \times |f'(c)| \leq M|b-a|$.

□

Fonctions lipschitziennes

Rappel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \geq 0$. On dit que f est k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Propriété 19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si f' est bornée sur I par une constante $M \geq 0$, alors f est M lipschitzienne sur I.

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis sur tout segment $[x, y]$: $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.
□

Remarque. Si f est $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors f est lipschitzienne. En effet f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc y est bornée.

Exemple. Les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. En effet pour le sinus par exemple, on a $|\sin'| = |\cos| \leq 1$. Par la proposition précédente, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

En particulier pour $y = 0$, on retrouve l'inégalité classique $|sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est contractante si elle est k-lipschitzienne, avec $0 \leq k < 1$.

Propriété 20

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante. Si f admet un point fixe l, alors l est unique et toute suite définie par récurrence par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

Preuve.

- Supposons avoir un deuxième point fixe $l_1 \neq l \in I$. Alors $|f(l) - f(l_1)| \leq k|l_1 - l|$ i.e. $|l - l_1| \leq k|l - l_1|$ i.e. $1 \leq k$ (car $|l - l_1| > 0$)... absurde ! Ainsi si f admet un point fixe l, celui-ci est unique.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$.

  $\mathcal{P}(0)$ est évidente.

  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - l| \leq k^n|u_0 - l|$. Alors on a :

  $$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l| \leq k \times k^n|u_0 - l| = k^{n+1}|u_0 - l|.$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

  Comme $k \in]0,1[$, $(k^n|u_0 - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

□

Calcul approché du point fixe. Si $I = [a, b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - c| \leq k^n|u_0 - c| \leq k^n|b - a|.$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe l de f avec une précision au moins égale à $k^n|b - a|$.

Exercice. Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = \exp(-u_n - 1)$. Montrer qu'elle converge et préciser $L = \lim u_n$ à 10^{-5} près.

On pose $f(x) = \exp(-x - 1)$. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

- Étude des points fixes de f sur $\mathbb{R}_+$.

  La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante, et telles que $\varphi(0) = e^{-1}$ et $\lim_{+\infty} \varphi = -\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $] - \infty, e^{-1}]$, et s'annule une et une seule fois. La fonction f admet donc un unique point fixe L sur $\mathbb{R}_+$. De plus, puisque $\varphi(1) = e^{-2} - 1 < 0$, on a $0 \leq L \leq 1$.

- Étude de la convergence vers le point fixe L.

  On a $0 \leq |f'(x)| = \exp(-x - 1) \leq e^{-1} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. L'inégalité des accroissements finis donne :

  $$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

  Par la proposition précédente, on sait que (u_n) converge vers L. Plus précisément, on a :

  $$0 \leq |u_n - L| = |f(u_{n-1}) - f(L)| \leq e^{-1}|u_{n-1} - L|.$$

  Par récurrence, on a $|u_n - L| \leq e^{-n}|u_0 - L| \leq e^{-n}$. Puisque $\lim e^{-n} = 0$, on retrouve que $\lim u_n = L$ par théorème d'encadrement. De plus on déduit que $u_{12} = 0.27846...$ donne L à $e^{-12} \leq 10^{-5}$ près.

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition.

- On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $a \in I$ si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite quand $x \to a$. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point de I.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes. On définit les fonctions $Re(f) : I \to \mathbb{R}$ et $Im(f) : I \to \mathbb{R}$ par : pour tout $x \in I$, $Re(f)(x) = Re(f(x))$ et $Im(f)(x) = Im(f(x))$.

Propriété 21

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a, et on a alors :

$$f'(a) = Re(f)'(a) + iIm(f)'(a).$$

Preuve. C'est une conséquence des résultats établis sur les limites, puisqu'on sait qu'il y a équivalence entre :

- $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a ;
- $x \mapsto \dfrac{Re(f)(x)-Re(f)(a)}{x-a}$ et $x \mapsto \dfrac{Im(f)(x)-Im(f)(a)}{x-a}$ ont des limites finies en a.

Et on a alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{Re(f)(x)-Re(f)(a)}{x-a} + i \lim_{x\to a} \frac{Im(f)(x)-Im(f)(a)}{x-a}.$$

D'où le résultat. □

Propriété 22

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\phi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonctions dérivable sur I. Alors, la fonction $f : t \in I \mapsto e^{\phi(t)} \in \mathbb{C}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}.$$

Exemple. Considérons la fonction $f : t \mapsto e^{it}$. D'après la proposition précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = ie^{it}.$$

Remarque. Le théorème de Rolle (et des accroissement finis) est faux pour les fonction à valeurs complexes : la fonction f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, on a bien $f(2\pi) = f(0) = 1$. Cependant pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $f'(t) \neq 0$ puisque $|f'(t)| = 1$.

On conserve cependant l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes.

Propriété 23 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que f' est bornée par $M \geq 0$ sur $]a, b[$: $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$. Alors on a l'inégalité $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Preuve. Notons θ un argument de $f(b) - f(a)$, de sorte que $e^{-i\theta}(f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|$. On pose $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Re(e^{-i\theta}f(x))$. g est dérivable sur $]a, b[$ (car partie réelle d'une fonction qui l'est) et pour $x \in]a, b[$,

$$|g'(x)| = |\Re(e^{-i\theta}f'(x))| \leq |e^{-i\theta}f'(x)| = |f'(x)| \leq M.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis (cas réel), g est M-lipschitzienne. Ainsi $|g(b) - g(a)| \leq M|b - a|$. Or,

$$|g(b) - g(a)| = |\Re(e^{-i\theta}(f(b) - f(a)))| = |\Re(|f(b) - f(a)|)| = |f(b) - f(a)|.$$

Ainsi, on a bien $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$. □

Propriété 24

Une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{C}$ de dérivée bornée par k est k-lipschitzienne.

Exemple. $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne.

Propriété 25

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si et seulement si elle est dérivable et de dérivée nulle.

Preuve.

- $\Rightarrow$ Si f est constante, son taux d'accroissement en tout point de I est nul, et donc f est dérivable sur I et f' est nulle.
- $\Leftarrow$ Si f a une dérivée nulle sur I, alors f est 0-lipschitzienne sur I de sorte que $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in I$. Donc f est constante.

□

Pour résumer ce qui est vrai ou non pour une fonction à valeurs complexes :

Ce qu'on garde :	**Ce qu'on ne garde pas :**
Développement limité à l'ordre 1	Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque
Dérivable $\Rightarrow$ continu	Annulation aux extrema locaux
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions $\mathcal{C}^k$	Théorème des accroissements finis
Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^k$	Lien monotonie/signe de la dérivée
Inégalité des accroissements finis	Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$
Dérivée bornée $\Rightarrow$ f lipschitzienne	
Dérivée nulle $\Rightarrow$ f constante	