Chapitre 13

Limite et continuité

1 Limites de fonctions **2**
- 1.1 Définitions 2
- 1.2 Limites à droite et à gauche 4
- 1.3 Propriétés 5
- 1.4 Opérations sur les limites 6
- 1.5 Limites et inégalités 7

2 Théorèmes d'existence de limites **8**
- 2.1 Théorèmes d'encadrement 8
- 2.2 Fonctions monotones 9

3 Continuité **10**
- 3.1 Continuité en un point 10
- 3.2 Continuité sur un intervalle I 13
- 3.3 Image d'un intervalle par une fonction continue 14

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ **18**

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Limites de fonctions

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On notera :

- $\overset{\circ}{I} = I \setminus \{\text{extrémités de } I\}$ (l'intérieure de I) ;
- $\bar{I} = I \cup \{\text{extrémités de } I\}$.

Par exemple, $\overset{\circ}{\overbrace{[0,2[}} =]0,2[$, $\overline{[0,2[} = [0,2]$, $\overset{\circ}{\overbrace{]1,+\infty[}} =]1,+\infty[$, $\overline{]1,+\infty[} = [1,+\infty[\cup \{+\infty\}$, $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

1.1 Définitions

Premières définitions

Définition.

Limite en un point. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel appartenant à $\bar{I}$. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

- f admet pour limite $-\infty$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, si :

$$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq M.$$

Remarque. Dans le cas où $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, la définition signifie que la distance de $f(x)$ à l peut être rendue inférieure à tout nombre $\epsilon > 0$ donné, à condition que la distance de x à a soit assez petite.

Définition.

Limite en $+\infty$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :

$$\forall N < 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \leq N$$

Remarque. Dans le cas où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, la définition signifie que la distance de $f(x)$ à l peut être rendue inférieure à tout nombre $\epsilon > 0$ donné, à condition que x soit assez grand.

Définition.

Limite en $-\infty$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une limite de On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

$$\forall M > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :

$$\forall N < 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Longrightarrow f(x) \leq N$$

Remarque. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $|f(x) - l| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Formulation unique avec les voisinages

Définition.

On appelle voisinage de :

- $a \in \mathbb{R}$ tout intervalle $[a - h, a + h]$ où $h > 0$;
- $+\infty$ tout intervalle $[c, +\infty[$ où $c \in \mathbb{R}$;
- $-\infty$ tout intervalle $]-\infty, c]$ où $c \in \mathbb{R}$.

On note alors $\mathcal{V}(a) = \{$ voisinages de a $\}$ pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Pour $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \bar{I}$, on dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap V$.

Remarque. $x \mapsto x^2 - x$ est positive au voisinage de $+\infty$: $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [c, +\infty[,\ x^2 - x \geq 0$.

Remarque. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut réécrire toutes les définitions précédente sous la forme unique suivante :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in I,\ x \in U \Rightarrow f(x) \in V.$$

Premières propriétés

Propriété 1 (Unicité de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, cette limite est alors unique et notée $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Preuve. On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Elle s'adapte facilement aux autres cas.
Raisonnons par l'absurde et supposons que f admettent deux limites l_1 et l_2 distinctes en a. Posons $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3} > 0$. Par définition de la limite en a :

$$\exists \eta_1 > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l_1| \leq \epsilon$$
$$\exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - l_2| \leq \epsilon$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors :

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leq 2\frac{|l_1 - l_2|}{3}$$

D'où $|l_1 - l_2| = 0$, puis $l_1 = l_2$. D'où le résultat. □

Remarque. Attention, on utilisera cette notation qu'après avoir montré l'existence d'une limite en a !

Propriété 2

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l|$.

Preuve. Supposons $a \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \ \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

D'où pour tout $\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi on a bien $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l|$. □

1.2 Limites à droite et à gauche

Définition.

[Limites à droite et à gauche] Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$.

- On dit que f admet une limite à gauche en a si $f_{|I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.
- On dit que f admet une limite à droite en a si $f_{|I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Propriété 3

Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \overset{\circ}{I}$, alors elle admet une limite à gauche et une limite à droite en a et ces limites sont égales à l.

Preuve. Immédiat à partir de la définition. □

Remarque. La réciproque est fausse : par exemple, considérons f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a bien $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Par la proposition précédente, si f a une limite en 0, celle ci est nécessairement 0.
Posons $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, on a $0 = |0 - 0| \leq \eta$, alors que $|f(0) - 0| = 1 > \epsilon$. f n'admet donc pas 0 comme limite et n'admet donc pas de limite en 0.

Définition.

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$, et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en a et que celles-ci coïncident.

Exemple. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Alors $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$ et g admet donc pour limite 0 en 0.

1.3 Propriétés

Propriété 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Preuve. Faisons la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Notons $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Pour $\epsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1.$$

Ainsi pour $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - l| + |l| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq 1 + |l| \end{aligned}$$

et f est bien bornée au voisinage de a. □

Propriété 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite $l > 0$ en a, alors f est minorée au voisinage de a par un nombre strictement positif :

$$\text{si } a \in \mathbb{R} : \quad \exists m > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq m.$$

Preuve. Supposons que $a \in \mathbb{R}$. Prenons $\epsilon = \dfrac{l}{3}$:

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta],\ |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Ainsi, $0 < \dfrac{2l}{3} = l - \epsilon \leq f(x)$. □

Remarque. Si f admet une limite non nulle en a, alors f est non nulle au voisinage de a : il suffit d'appliquer la proposition précédente à $|f|$.

Théorème 6 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{I}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \Big(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l\Big).$$

Preuve. Supposons par exemple que a et l sont finis, les autres cas étant analogues.

$\Rightarrow$ Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Fixons $\epsilon > 0$. On a donc :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$. Par définition :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - a| \leq \eta$$

On en déduit donc :

$$\forall n \geq N,\ |f(u_n) - l| \leq \epsilon$$

La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers l.

$\Leftarrow$ Pour montrer la réciproque, nous allons procéder par contraposition. Supposons que f ne tende pas vers l quand x tend vers a. Ainsi :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I, \Big(|x_a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - l| > \epsilon\Big)$$

Prenons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\eta_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $\exists x_n \in I, \Big(|x_n - a| \leq \eta \text{ et } |f(x_n) - l| > \epsilon\Big)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ alors que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l.

$\square$

► *Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a, on peut chercher deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers a et telles que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont deux limites différentes.*

Exemples. ♦ cos n'a pas de limite en $+\infty$: en effet, on pose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\pi n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((2n+1)\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui divergent vers $+\infty$, mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.

♦ $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0^+ : en effet, prenons $u_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ pour tout $n \geq 1$. On a : $\lim f(u_n) = +\infty$ et $\lim f(v_n) = 0$. Donc f n'a pas de limite en 0^+.

1.4 Opérations sur les limites

Propriété 7

Soit $a \in \overline{I}$. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies l et $l' \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a. Alors :

(1) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda l + \mu l'$.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$.

(3) Si $l' \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

Preuve. On va utiliser les opérations sur les limites de suites et la caractérisation séquentielle de la limite pour étendre ces propriétés aux limites de fonctions.
Montrons (1) : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = l'$. Par opérations sur les limites de suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda f(u_n) + \mu g(u_n) = \lambda l + \mu l'$. Or ceci est vrai pour toute suite (u_n) qui tend vers a. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda l + \mu l'$.
On procède de même pour les points (2) et (3). □

Remarque. Ces formules se généralisent aux cas des limites infinies en a, sauf en cas de **formes indéterminées** du type :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}.$$

Propriété 8

Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et g est bornée au voisinage de a. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$ existe et vaut 0.

Preuve. On sait que le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui tend vers 0. On utilise ici alors la caractérisation séquentielle de la limite pour étendre cette propriété au cas continu. □

Exercice. Déterminer si elle existe la limite en 0 de $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x\sin(1/x)$.

En utilisant la proposition précédente, on a que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut 0.

Propriété 9 (Composition des limites)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$, et $a \in \overline{I}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Preuve. Faisons la preuve dans le cas où a, b et c sont des réels. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite de g :

$$\exists \nu > 0,\ \forall y \in J,\ |y - b| \leq \nu \implies |g(y) - c| \leq \epsilon$$

Maintenant par définition de la limite de f :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \nu$$

On a donc pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, $|g(f(x)) - c| \leq \epsilon$ ce qui permet de conclure. □

1.5 Limites et inégalités

Propriété 10 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \underline{I}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$ et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a alors $l \leq l'$.

Preuve. Supposons $a \in \mathbb{R}$. **Par l'absurde**, supposons $l' < l$. On pose alors $\epsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$. Par définition de la limite :

$$\begin{array}{l} \exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-l| \leq \epsilon \\ \exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |g(x)-l'| \leq \epsilon \end{array}$$

De plus, $\exists \eta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\eta_3, a+\eta_3]$, $f(x) \leq g(x)$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on a :

$$\begin{array}{l} l-\epsilon \leq f(x) \leq l+\epsilon \\ l'-\epsilon \leq g(x) \leq l'+\epsilon \\ f(x) \leq g(x) \end{array}.$$

Ainsi, $l-\epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq l'+\epsilon$. On a donc $l-l' \leq 2\epsilon = \dfrac{2}{3}(l-l')$. Absurde. Ainsi, $l \leq l'$. □

Remarque. Les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

2 Théorèmes d'existence de limites

2.1 Théorèmes d'encadrement

Théorème 11 (Théorème de convergence par encadrement)

Soient f, g et h trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \end{cases}$ alors : $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe et vaut l.

Preuve. On fait la preuve dans le cas où a est fini. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite :

$$\begin{array}{l} \exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-l| \leq \epsilon \\ \exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |h(x)-l| \leq \epsilon \end{array}$$

De plus, $\exists \eta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\eta_3, a+\eta_3]$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on a :

$$\begin{array}{l} l-\epsilon \leq f(x) \leq l+\epsilon \\ l-\epsilon \leq h(x) \leq l+\epsilon \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array}.$$

Ainsi, $l-\epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l+\epsilon$. On a donc $|g(x)-l| \leq \epsilon$. Ainsi, on a bien montré que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$. □

Propriété 12 (Mini théorème d'encadrement)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut 0.

Théorème 13 (Théorème de divergence par minoration ou majoration)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I.

1. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

2. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition précédente. □

2.2 Fonctions monotones

Théorème 14 (Théorème de la limite monotone)

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$.

- Supposons f est croissante.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
    Sinon on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
    Sinon on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Supposons f décroissante.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
    Sinon on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
    Sinon on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Notation. $\inf\limits_{x\in]a,b[} f(x) = \inf\{f(x) | x \in]a,b[\}$ et $\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x) = \sup\{f(x) | x \in]a,b[\}$.

Preuve. (Non exigible) Nous allons faire la preuve dans le cas où f est croissante pour la limite en b, les autres points se montrent de même.

- Supposons f majorée. Alors, l'ensemble $E = \{f(x),\ x \in]a,b[\}$ est majoré. Il est non vide car $a < b$, donc admet une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $y_0 \in E$ tel que $l - \epsilon < y_0$. Comme $y_0 \in E$, il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Pour tout $x \in [x_0, b[$, on a alors $l - \epsilon \leq f(x_0) \leq f(x)$ (car f est croissante) et $f(x) \leq l$ (car $f(x) \in E$). Ainsi, en posant $\eta = b - x_0$, on a que : $\forall x \in]a,b[,\ |x - b| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$. On a donc montré que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = l$.

- Supposons f non majorée. Soit $A > 0$. Comme A ne majore pas f, il existe $x_A \in]a,b[$ tel que $f(x_A) > A$. Pour tout $x \in [x_A, b[$, on a alors $A \leq f(x_A) \leq f(x)$ (car f est croissante). On a donc montré que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

$\square$

En conséquence, on a le résultat suivant.

Propriété 15

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in I$ tel que a ne soit pas une borne de I. Alors, f admet des limites finies à gauche et à droite en a et on a :

$$\text{si } f \text{ croissante : } \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x);$$

$$\text{si } f \text{ décroissante : } \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Preuve. Montrons le résultat dans le cas f croissante et notons c et d les bornes de I. L'application $f :]c, a[\to \mathbb{R}$ est croissante, et pour $x \in]c, a[$, $f(x) \leq f(a)$, donc cette fonction est majorée. Elle admet donc une limite quand x tend vers a^-. De plus pour tout $x \in]c, a[$, $f(x) \leq f(a)$, donc en passant à la limite x tend vers a^-, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leq f(a)$.
De même, en considérant $f_{|]a,d[}$, on montre que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe et est supérieure ou égale à $f(a)$. $\square$

Remarque. Ces deux inégalités peuvent être strictes (penser à la fonction partie entière) et la fonction n'est pas forcément continue en a. On pourra cependant établir sa continuité en a en prouvant que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, l'existence des limites étant assurées par la monotonie de f.

Exemple. On considère la fonction primitive $x \mapsto F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrons qu'elle a une limite finie en $+\infty$.

D'une part, F est croissante comme primitive d'une fonction positive. Il suffit d'établir qu'elle est majorée. On a :

- $\exp(-t^2) \leq 1$ si $0 \leq t \leq 1$;
- $\exp(-t^2) \leq \exp(-t)$ si $t \geq 1$.

Ainsi on a pour tout $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt + \int_1^x e^{-t} dt = 1 + e^{-1} - e^{-x} \leq 1 + e^{-1}.$$

Ainsi, F est croissante, majorée par $1 + e^{-1}$: elle admet donc une limite en $+\infty$ (dont on peut établir qu'elle vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).

3 Continuité

3.1 Continuité en un point

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a, qui vaut alors $f(a)$. Autrement dit, f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Preuve. Montrons que si f a une limite finie l en $a \in I$, alors nécessairement $l = f(a)$. On a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \ |x - a| \leq \eta, \ |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Comme $a \in [a - \eta, a + \eta] \cap I$, on a $|f(a) - l| \leq \epsilon$. Ceci vaut pour tout $\epsilon > 0$, donc $l = f(a)$. □

Remarque. Géométriquement, une fonction est continue si son graphe se trace “sans lever le crayon”.

Exemple. Montrons à partir de la définition que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 2.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \dfrac{|x-2|}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \leq |x - 2|$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, prenons $\eta = \epsilon > 0$, si $|x - 2| \leq \epsilon$ alors $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| \leq \epsilon$.

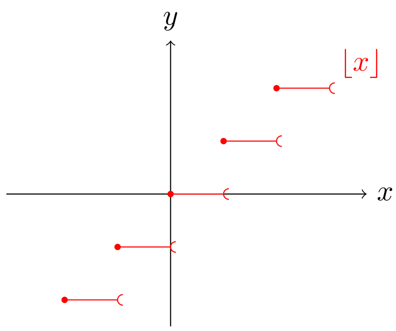
Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que :

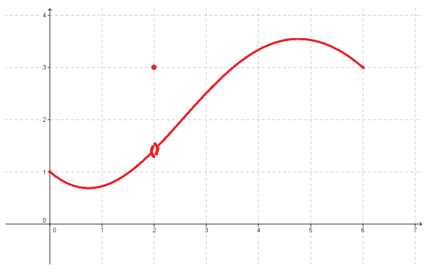
- f est **continue à gauche** en a si $f(a)$ est la limite à gauche de f en a.
- f est **continue à droite** en a si $f(a)$ est la limite à droite de f en a.

Remarque. Une fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Exemples. ⧫ La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



⧫ La fonction f suivante admet une limite à droite égale à la limite à gauche en $x = 2$, mais elle n'est pas continue en $x = 2$ (ni même à gauche ou à droite) puisque cette limite n'est pas égale à $f(2)$.



Définition.

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a et telle que $\tilde{f}_{|I \backslash \{a\}} = f$.

Propriété 16

Soit $a \in I$ et $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie l en a.
Dans ce cas, un tel prolongement $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ est unique, donné par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a; \\ l \text{ si } x = a. \end{cases}$$

On l'appelle le prolongement par continuité de f en a (qu'on notera souvent f sans distinction par abus de notation).

Preuve.

$\Rightarrow$ Si f est prolongeable par continuité en a, alors il existe $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a et telle que $\tilde{f}_{|I\backslash\{a\}} = f$. Par continuité de $\tilde{f}$ en a, on a :

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a^+} \tilde{f}(x).$$

Or $\tilde{f}_{|I\backslash\{a\}} = f$, donc on a $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Ainsi f admet une limite l en a avec $l = \tilde{f}(a)$.

Ceci prouve également l'unicité (s'il existe) du prolongement par continuité de f en a.

$\Leftarrow$ Supposons que f admet une limite finie l en a. Posons alors $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a; \\ l \text{ si } x = a \end{cases}$. La fonction $\tilde{f}$ prolonge bien f, et est continue en a puisque :

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a^+} \tilde{f}(x).$$

□

Exemple. Sinus cardinal.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. f est définie sur $\mathbb{R}^*$, mais $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Exemple. Fonctions puissances.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction puissance d'exposant α, notée p_α, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < 0 \\ 0 \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$. Ainsi si $\alpha > 0$, la fonction p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

Propriété 17 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exemple. Montrons que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

On utilise la caractérisation séquentielle de la limite :

- tout irrationnel a est limite d'une suite de rationnels (u_n), et on a alors : $\lim \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1 \neq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)$. Ainsi $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point irrationnel.
- tout rationnel a est limite d'une suite d'irrationnels (u_n) (pour cela, on sait qu'il existe (v_n) une suite de rationnels tendant vers $a-\sqrt{2}$ et on pose $u_n = v_n + \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), et on a alors : $\lim \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 0 \neq 1 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)$. Ainsi $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point rationnel.

3.2 Continuité sur un intervalle I

Définition.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **continue sur l'intervalle** I si elle est continue en chaque point de I. On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Exemples. Les fonctions exp, log, $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **lipschitzienne sur** I s'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que :

$$\forall (x,x') \in I^2, \quad |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

On dira plus particulièrement dans ce cas que f est k-lipschitzienne.

Propriété 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Preuve.

□

Exemple. Montrons que les fonctions sinus, cosinus et valeur absolue sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Pour le sinus, rappelons qu'on avait montré que $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x) - \sin(y)| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq |x-y|.$$

Pour le cosinus, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\sin(\pi/2 - x) - \sin(\pi/2 - y)| \leq |(\pi/2 - x) - (\pi/2 - y)| \leq |x - y|.$$

Pour la fonction valeur absolue, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \text{ par la deuxième inégalité triangulaire.}$$

On en déduit en particulier que ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Attention, la réciproque est fausse en général : par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. En effet, dans le cas contraire il existerait $k > 0$ tel que :

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}_+^2, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq k|x - x'| = k|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \times |\sqrt{x} + \sqrt{x'}|.$$

D'où pour $x \neq x'$:

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}_+^2, x \neq x', \quad 1 \leq k(\sqrt{x} + \sqrt{x'}),$$

ce qui est faux si on choisit x et x' assez petits.

Propriété 19 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g des fonctions continues sur I et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Les fonctions $\lambda f + \mu g$, $f \times g$ sont continue sur I.

(2) Si de plus, g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Remarque. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ comme sommes et produits de fonctions continues. La fonction tan est continue sur $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, comme quotient de fonctions continues. Une fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ privée de ses pôles, c'est à dire des racines de son dénominateur Q.

Propriété 20

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur J avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Remarque. C'est en pratique avec les théorèmes précédents qu'on établit la continuité d'une fonction d'une variable réelle, sauf en certains points où une étude particulière est nécessaire.

Exemple. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur I, alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur I : il suffit de noter que :

$$\sup(f,g) = \frac{|f-g| + g + f}{2} \quad \text{et } \inf(f,g) = \frac{f + g - |f-g|}{2}.$$

Ces fonctions sont alors continues comme composées et combinaisons linéaires de fonctions continues.

3.3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 21 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a,b) \in I^2$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Preuve. Supposons que $a < b$. On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ dont la limite commune c vérifie $f(c) = 0$.

- Construisons (a_n) et (b_n). On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose construits a_n et b_n soient construits, avec :

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad f(a_n)f(b_n) < 0$$

  On pose alors $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

– si $f(a_n)f(m_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.
– si $f(a_n)f(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans chacun de ces deux cas, on a bien :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

- On montre que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Par construction, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, par construction, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, donc $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $c \in [a, b]$.

Comme f est continue, en passant à la limite dans l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, on obtient $f(c)^2 \leq 0$. Ainsi $f(c) = 0$ et le théorème est démontré. □

Remarque. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - c| \leq |b_n - a_n| \leq \dfrac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n fournit une approximation de c à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près (il en est de même pour b_n).

Algorithme de dichotomie. On reprend la construction précédente dans l'algorithme suivant, qui calcule a_n et b_n tant que $b_n - a_n > \varepsilon$ et qui renvoie c à la précision ε.

Entrer a, b, ε ;

Tant que $b - a > \varepsilon$, faire :

$m \leftarrow (a + b)/2$;
Si $f(a)f(m) \leq 0$, alors $b \leftarrow m$, sinon $a \leftarrow m$;

Sortir a.

Exercices.

- Montrer qu'une fonction continue sur I ne s'annulant pas garde un signe constant.
- Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair a au moins une racine réelle.

Propriété 22

Si I est un intervalle et si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, pour tout $a, b \in I$ et pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Preuve. Pour tout $(u, v) \in f(I)^2$, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $u = f(a)$ et $v = f(b)$. Soit y entre $f(a)$ et $f(b)$, et posons $g(x) = f(x) - y$. La fonction g est continue, $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a, b] \subset I$ tel que $f(c) = y$. Ainsi $y \in f(I)$ et donc $[u, v] \subset f(I)$, ce qui prouve que $f(I)$ est un intervalle. □

Remarque. Notons que l'intervalle d'arrivée $f(I)$ n'est pas toujours de même nature que l'intervalle de départ I. Par exemple,

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f\left(]-\pi, \pi[\right) = [-1, 1];$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g\left(]-1, 1[\right) = [0, 1[.$$

Propriété 23

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Remarque. c et d sont alors des minimum et maximum globaux de f sur $[a,b]$.

Preuve. (Hors programme) On commence par rappeler la caractérisation suivante de la borne supérieure d'un ensemble qui sera utile ici.

Rappel. Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, on a :

$$M = \sup(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to M \\ M \text{ est un majorant de } A. \end{cases}$$

- Notons $A = \{x \in [a,b] \ ; \ f_{|[a,x]} \text{ est bornée}\}$. $a \in A$ donc A est non vide, et A est majoré par b. A admet donc une borne supérieure c. On souhaite montrer que $c = b$. Comme b majore A, on a déjà $c \leq b$. On raisonne par l'absurde en supposant $c < b$.

  Comme f est continue en c, elle est bornée au voisinage de c. On a donc $\eta > 0$ tel que $f_{[c-\eta, c+\eta]}$ soit bornée et il existe $M_1 > 0$ tel que $\forall t \in [c-\eta, c+\eta]$, $|f(t)| \leq M_1$.

  Par caractérisation de la borne supérieure, on a $x \in A$ tel que $x > c - \eta$. Comme $x \in A$, $f_{|[a,x]}$ est bornée et on a $M_2 > 0$ tel que $\forall t \in [a,x]$, $|f(t)| \leq M_2$.

  Soit $M = \max(M_1, M_2)$. Alors pour $t \in [a, c+\eta]$, $|f(t)| \leq M$, donc $f_{|[a,c+\eta]}$ est bornée et $c + \eta \in A$. Comme $c = \sup(A)$, c'est absurde !

  Ainsi on a bien $c = b$.

  Montrons alors que f est bornée sur $[a,b]$: f est continue en b, donc bornée au voisinage de b. Il existe donc $\eta > 0$ tel que f est bornée sur $[b-\eta, b]$. Par caractérisation de la borne supérieure de A, il existe $x_0 > b - \eta$ tel que f est bornée sur $[a, x_0]$. On obtient en raisonnant comme précédemment que f est bornée sur $[a,b]$.

- Notons $s = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t)$ (s existe car $\{f(t) \ ; \ t \in [a,b]\}$ est non vide et majoré). On veut montrer que s est atteint, c'est à dire qu'il existe $t \in [a,b]$ tel que $f(t) = s$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \neq s$.

  Posons $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{s - f(t)}$. g est définie et continue sur $[a,b]$ comme quotient de fonctions qui le sont, donc g est bornée par la proposition précédente.

  Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s. Comme pour $n \in \mathbb{N}$, $f(t_n) \leq s$, $g(t_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, ce qui est impossible puisque g est bornée.

  Ainsi s est atteinte. On montre de même que $\inf\limits_{t \in [a,b]} f(t)$ est atteint.

$\square$

Comme conséquence directe des résultats précédents, on obtient la proposition suivante.

Propriété 24

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Preuve. En effet, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors :

- f est bornée et atteint ses bornes : $\exists c, d \in [a, b]$, $f([a, b]) \subset [f(c), f(d)]$.
- par le TVI, $f([a, b])$ est un intervalle, donc en particulier $[f(c), f(d)] \subset f([a, b])$.

Ainsi $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$ et on a bien le résultat souhaité. □

Propriété 25

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective sur I si et seulement si f est strictement monotone.

Preuve.

$\Leftarrow$ Supposons que $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ sinon $x < y$ ou $x > y$ et on aurait $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$.

$\Rightarrow$ On va montré que pour tout $a, b \in I$, $a < b$, f est strictement monotone sur $[a, b]$. Supposons par exemple $f(a) < f(b)$ et montrons que f est strictement croissante, c'est à dire pour tout $a \leq x < y \leq b$, $f(x) < f(y)$. On pose pour cela :

$$g(t) = f(tx + (1 - t)a) - f(ty + (1 - t)b).$$

La fonction g est définie pour tout $t \in [0, 1]$ (car $tx + (1 - t)a, ty + (1 - t)b \in [a, b]$). De plus g ne s'annule pas sur $[0, 1]$ car sinon il existe t tel que :

$$f(tx + (1 - t)a) = f(ty + (1 - t)b) \Rightarrow tx + (1 - t)a = ty + (1 - t)b$$

ce qui est impossible car $tx+(1-t)a < ty+(1-t)b$. On sait alors que g garde un signe constant qui est celui de $g(0) = f(a) - f(b) < 0$. On en déduit que $g(1) < 0$, c'est à dire $f(x) < f(y)$. D'où le résultat.

□

Théorème 26

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa réciproque est de plus continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ de même monotonie que f.

Preuve. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer f croissante.
On a déjà prouvé que $f(I)$ est un intervalle, et que $f : I \to \mathbb{R}$ est injective. Elle est de plus surjective si on restreint son ensemble d'arrivée à $f(I)$. Ainsi f réalise une bijection de I sur $f(I)$. On note $f^{-1} : f(I) \to I$ sa bijection réciproque.
f^{-1} est strictement croissante : pour tout $y < y'$ des éléments de $f(I)$, on a $f \circ f^{-1}(y) < f \circ f^{-1}(y')$. Puisque f est strictement croissante, on obtient bien $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.
f^{-1} est continue : on sait déjà que f^{-1} est strictement croissante. On a vu qu'alors pour tout $a \in f(I)$, f^{-1} admet des limites à droite et à gauche en a et que :

$$\lim_{y \to a^-} f^{-1}(y) \leq f^{-1}(a) \leq \lim_{y \to a^+} f^{-1}(y).$$

Supposons que l'une de ces inégalités ne soit pas une égalité, par exemple $f - 1(a) < \lim_{y \to a^+} f^{-1}(y)$. On a alors :

$$\forall y \leq a,\ f^{-1}(y) \leq f^{-1}(a) \quad \text{et} \quad \forall y > a, f^{-1}(y) \geq \lim_{y \to a^+} f^{-1}(y).$$

Alors tout y compris strictement entre $f^{-1}(a)$ et $\lim_{y \to a^+} f^{-1}(y)$ n'ont pas d'antécédent par f^{-1}. Ceci est impossible puisque f^{-1} est une bijection de $f(I)$ sur I. □

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition.

- On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand x tend vers a (élément ou extrémité de I) si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \implies |f(x)-l| \leq \epsilon.$$
- On dit que f est continue en $a \in I$ si elle y admet une limite finie. On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I.
- On dit que f est bornée au voisinage de a s'il existe $M > 0$ et $\eta > 0$ tels que : $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq M$.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On définit les fonctions $Re(f), Im(f) : I \to \mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in I, \quad Re(f)(x) = Re(f(x)) \quad \text{ et } \quad Im(f)(x) = Im(f(x)).$$

Propriété 27

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ admettent des limites finies quand x tend vers a, et on a alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} Re(f(x)) + i \lim_{x\to a} Im(f(x)).$$

Preuve. • Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$. Alors pour $x \in I$, $|Re(f(x))-Re(l)| = |Re(f(x)-l)| \leq |f(x)-l|$ avec $|f(x)-l| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, donc $Re(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} Re(l)$. De même $Im(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} Im(l)$.
• Supposons que $Re(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ et $Im(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2$, avec l_1 et $l_2 \in \mathbb{R}$. On pose $l = l_1 + il_2$. Alors pour $x \in I$,
$$\begin{aligned} |f(x)-l| &\leq |Re(f(x)-l)| + |Im(f(x)-l)| \quad \text{(par l'inégalité triangulaire).} \\ &\leq |Re(f(x))-l_1| + |Im(f(x))-l_2| \end{aligned}$$
Comme $|Re(f(x))-l_1| + |Im(f(x))-l_2| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, on a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$. □

On a les conséquences suivantes.

Propriété 28

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} \overline{f(x)} = \bar{l}$.

Propriété 29

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On a l'équivalence :
$$f \text{ est continue sur } I \iff \begin{cases} Re(f) \text{ est continue sur } I \\ \text{et} \\ Im(f) \text{ est continue sur } I \end{cases}$$

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable :**
Unicité de la limite	Majorant/minorant
Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a	Monotonie
Opérations sur les limites	Limites infinies
Opérations sur les fonctions continues en a ou sur I	Passage à la limite des $\leq$
	Théorème des gendarmes
	Théorème de la limite monotone
	Théorème des valeurs intermédiaires
	Maximum/minimum