Chapitre 10

Suites réelles

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint-Louis (Paris)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition.

Une **suite réelle** u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé **n-ième terme de la suite** (ou terme d'indice ou de rang n). La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) plus simplement. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. On prendra garde à bien distinguer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec son n-ième terme u_n.
Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par un intervalle d'entiers du type $[|n_0, +\infty|]$. La suite u est dans ce cas notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Une suite peut être définie de trois manières différentes :

- par une **formule explicite** : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n, soit $u_n = f(n)$. Par exemple,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n^2+1}.$$
- par une **formule de récurrence** : u_n est exprimé en fonction de n et des termes précédents : u_{n-1}, ... u_0. Par exemple,
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \quad \text{(relation de récurrence d'ordre 1)}$$
$$v_0 = 0, v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \quad \text{(relation de récurrence d'ordre 2)}$$
La suite (v_n) est la suite de Fibonacci.
- par une **formule implicite** : le terme général u_n de la suite est solution d'une équation dépendant de n. Par exemple,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est l'unique solution de l'équation } x^3 + x - 1 = n.$$

1.2 Opérations sur les suites

Définition.

Soient u et v deux suites réelles.

- La somme de u et u est la suite notée $(u + v)$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$
- Le produit de u et v est la suite notée $(u \times v)$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u \times v)_n = u_n \times v_n$$
- Le produit de u par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la suite notée $\lambda.u$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n$$

1.3 Suites réelles et relation d'ordre

Définition.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- (strictement) croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- (strictement) décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.
- constante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$).

Remarque. Pour montrer qu'une suite est croissante, on pourra montrer, selon les cas :

- que $u_{n+1} - u_n \geq 0$,
- **si** $u_n > 0$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Exemple. Etudions la monotonie de $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Donc (u_n) est strictement décroissante.

Définition.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété 1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée i.e si et seulement si : $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Preuve. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Il existe alors m et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$. Soit $K = \max(|m|, |M|)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $-K \leq -|m| \leq m \leq u_n \leq M \leq |M| \leq K$, donc $|u_n| \leq K$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors $-M \leq u_n \leq M$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M et minorée par $-M$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. $\square$

Exercice. Montrer que l'ensemble des suites bornées est stable par somme, produit, et produit par un scalaire.

Définition.

On dit qu'une suite (u_n) satisfait la propriété $\mathcal{P}(n)$ à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Définition.

La suite (u_n) est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang i.e si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}.$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire, constante égale à 0 à partir du rang $n = 100$.

2 Limite d'une suite réelle

2.1 Limite finie

Définition.

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ si

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon\Big).$$

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe un réel l tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

Remarque. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(n \geq N \implies l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon \leq \epsilon\Big).$$

Autrement dit, ceci signifie qu'étant donné un nombre réel $\epsilon > 0$, tous les u_n sont dans le segment $[l-\epsilon, l+\epsilon]$ à partir d'un certain rang N.

Exemple. ♦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon$ i.e. $\frac{1}{n} \leq \epsilon$ i.e. $n \geq \frac{1}{\epsilon}$. Posons $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, alors pour $n \geq N$, $n \geq N > \frac{1}{\epsilon}$, donc $\frac{1}{n} \leq \epsilon$ et $|u_n| \leq \epsilon$.

♦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q \in]-1, 1[$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $\epsilon > 0$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon$, i.e. $|q|^n \leq \epsilon$ i.e. $\ln(|q|)n \leq \ln(\epsilon)$ i.e. $n \geq \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)}$ (car $\ln(|q|) < 0$ puisque $|q| < 1$). On pose $N = \left[\frac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)}\right] + 1$ et comme plus haut, on montre que pour $n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon$.

♦ Les suites u et v définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont divergentes.

Remarque. On notera que (u_n) converge vers l si et seulement si $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, le fait que la suite converge ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Propriété 2

Si la suite réelle (u_n) converge, alors sa limite est unique. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Preuve. Supposons par l'absurde que $l_1 \neq l_2$. Soit $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$. Par définition de la limite, on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N_1,\ |u_n - l_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N_2,\ |u_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors pour tout $n \geq N$, $|u_n - l_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $|u_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Ainsi, par l'inégalité triangulaire, $|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leq \epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$. D'où une contradiction, donc $l_1 = l_2$. □

Propriété 3

Si la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.

Preuve.

□

Remarque. La réciproque est fausse (prendre par exemple la suite des $(-1)^n$).

Lemme. Soit $l \in \mathbb{R}$ et on considère (α_n) une suite réelle positive tendant vers 0 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq \alpha_n$$

Alors, la suite (u_n) est convergente de limite $\lim u_n = l$.
Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ |v_n| \leq \epsilon$. De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2,\ |u_n - l| \leq v_n$. Posons, $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a : $|u_n - l| \leq v_n \leq \epsilon$. Ainsi, (u_n) converge vers l. □

▶ *Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on peut tenter de majorer $|u_n - l|$ par une suite qui converge vers 0.*

Exemple. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Supposons $a \neq 0$ (sinon le résultat est évident). Posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par définition de la limite, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}$.
On montre ensuite par récurrence aisée sur $n \geq N$ que $|u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}}|u_N|$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-N}}|u_N| = 0$, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.2 Limite infinie

Définition.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend (diverge) vers $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(n \geq N \implies u_n \geq A\Big).$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(n \geq N \implies u_n \leq A\Big).$$

Remarque. La définition de la limite $+\infty$ se traduit par : pour tout $A \in \mathbb{R}$, aussi grand soit-il, la suite (u_n) a tous ses termes plus grands que A à partir d'un certain rang.

La définition de la limite $-\infty$ se traduit par : pour tout $A \in \mathbb{R}$, aussi grand soit-il en valeur absolue, la suite (u_n) a tous ses termes plus petits que A à partir d'un certain rang.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $N = [A] + 1$ si $A \geq 0$, $N = 0$ sinon. Alors pour $n \geq N$, $n \geq N \geq A$.

Remarque. Si (u_n) n'est pas majorée, on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (prendre par exemple la suite définie par $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2.3 Propriétés des suites convergentes

Propriété 4

Toute suite réelle convergente est bornée.

Preuve. Soit (u_n) une suite convergente vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Posons $\epsilon = 1 > 0$, par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq 1$ par définition de la limite. Pour tout $n \geq N$, on a donc $|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq |l| + 1$. Posons alors $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |l|)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. $\square$

Remarque. La réciproque est fausse. La suite $\left((-1)^n\right)_{n\geq 0}$ est bornée mais ne converge pas.

Propriété 5

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, avec $l > 0$ ou $l = +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, avec $l < 0$ ou $l = -\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel $M < 0$ à partir d'un certain rang.

Remarque. Une suite qui converge vers un réel $\neq 0$ est donc non nulle à partir d'un certain rang.

Preuve. • Si $l = +\infty$, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \geq 1$.
Supposons donc $l \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \frac{l}{2}$. Pour tout $n \geq N$, on a alors $-\frac{l}{2} \leq u_n - l \leq \frac{l}{2}$ donc $u_n \geq \frac{l}{2} > 0$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang.
• Le deuxième point se montre de même. $\square$

2.4 Opérations sur les limites

Propriété 6

(1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent vers 0, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Preuve.

(1) Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence, on a :

$$\begin{aligned} &\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N_1,\ |u_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ &\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N_2,\ |v_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \epsilon$. Ainsi on a montré que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2) (v_n) est bornée donc il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$. Soit $\epsilon > 0$. par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\epsilon}{M}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a alors $|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq \frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon$ (en multipliant les inégalités entre nombres positifs). On a donc montré que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

□

Propriété 7 (Opérations sur les limites finies)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers l et l'.

(1) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.

(2) $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.

Preuve.

(1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l + \mu l')| = |\lambda(u_n - l) + \mu(v_n - l')| \leq |\lambda| \times |u_n - l| + |\mu| \times |v_n - l'|$$

avec $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $|v_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $|\lambda|$ et $|\mu|$ bornés. Ainsi par le lemme précédent, $|\lambda| \times |u_n - l| + |\mu| \times |v_n - l'| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - l v_n + l v_n - ll'| = |u_n - l| \times |v_n| + |v_n - l'| \times |l|$$

avec $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $|v_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $|l|$ borné et $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée (car convergente). Ainsi par le lemme précédent, $|u_n - l| \times |v_n| + |v_n - l'| \times |l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.

□

Propriété 8 (Limites infinies)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Preuve.

(1) (u_n) est minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :$\forall n \geq N$, $v_n \geq A - m$.
Alors pour tout $n \geq N$, $u_n + v_n \geq A$ et on a montré que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(2) (u_n) est minorée à partir d'un certain rang donc il existe $m > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1$, $u_n \geq m$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2$, $v_n \geq \frac{A}{m}$. Comme $m > 0$, on en déduit que pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $u_n v_n \geq A$.

$\square$

On déduit des propositions précédentes les opérations sur les limites, suivant les deux tableaux suivants :
Soient l, l' deux réels, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles.

Limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Limite de $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ La règle des signes donne le signe du produit	Forme indéterminée

Propriété 9 (Inverse)

(1) Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{R}^*$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

(2) Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0.

(3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est strictement positif (resp. strictement négatif) à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Preuve.

(1) Comme $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l'| > 0$, $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang N. Pour tout $n \geq N$, on a donc $|v_n| \geq m > 0$ et $v_n \neq 0$, donc $\frac{u_n}{v_n}$ existe. De plus

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l}{l'}\right| = \left|\frac{u_n l' - v_n l}{l' v_n}\right| = \frac{|u_n l' - l l' + l l' - v_n l|}{|l'| \times |v_n|} \leq \frac{|u_n - l| \times |l'| + |v_n - l'| \times |l|}{m|l'|}$$

et comme précédemment, on montre que $\frac{|u_n-l|\times|l'|+|v_n-l'|\times|l|}{m|l'|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

(2) Comme $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, elle est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang N_1, donc $u_n \neq 0$ à partir de ce même rang et $\frac{1}{u_n}$ existe.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :$\forall n \geq N_2$, $|u_n| \geq \frac{1}{\epsilon}$. Pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a alors $\left|\frac{1}{u_n}\right| \leq \epsilon$, donc on a montré que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(3) Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1$, $u_n > 0$. Ainsi $\frac{1}{u_n}$ existe à partir du rang N_1.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \leq 0$, on a $\frac{1}{u_n} \geq A$ à partir du rang N_1. Sinon $A > 0$ et par définition de la limite, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|u_n| \leq \frac{1}{A}$. Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $u_n > 0$, donc $u_n = |u_n| \leq \frac{1}{A}$ puis $\frac{1}{u_n} \geq A$. Ainsi on a montré que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

□

2.5 Passage à la limite dans les inégalités

Propriété 10 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers l et l' respectivement, et soient $m, M \in \mathbb{R}$.

(1) Si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u_n \leq M$.

(2) Si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u_n \geq m$.

(3) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$.

Preuve. On montre le troisième point, les deux autres points en découlent en prenant (u_n) ou (v_n) des suites constantes égales à m ou M. Par l'absurde. Supposons $l > l'$, on pose alors $\epsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$. Par définition de la limite, on a :

$$\begin{array}{lll} \exists N_1 \in \mathbb{N} & \text{tel que} & \forall n \geq N_1,\ |u_n - l| \leq \epsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} & \text{tel que} & \forall n \geq N_1,\ |v_n - l'| \leq \epsilon \end{array}$$

Il existe également $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que :$\forall n \geq N_3$, $u_n \leq v_n$.
Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a : $l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq l' + \epsilon$ et $l - l' \leq 2\epsilon = \frac{2}{3}(l - l')$... Absurde ! Ainsi $l \leq l'$. □

Remarque. On retiendra que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ mais on n'a pas $0 > 0$.

3 Théorème d'existence d'une limite

3.1 Théorèmes d'encadrement

Théorème 11 (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

- $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq v_n \leq w_n$
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que :
$\begin{cases} \forall n \geq N_1,\ |u_n - l| \leq \epsilon \\ \forall n \geq N_2,\ |w_n - l| \leq \epsilon \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \forall n \geq N_1,\ -\epsilon \leq u_n - l \leq \epsilon \\ \forall n \geq N_2,\ -\epsilon \leq w_n - l \leq \epsilon \end{cases}$
Posons $N_3 = \max(N_1, N_2, N)$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $-\epsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \epsilon$, donc $|v_n - l| \leq \epsilon$ et on a montré que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

Exemples. ♦ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. Calculer $\lim u_n$.

On a : $\frac{n}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$. Le théorème d'encadrement permet d'affirmer que la suite (u_n) tend vers 1.

♦ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{E(nx)}{n}$. Calculer $\lim u_n$.

Propriété 12

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

(1) Si $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(2) Si $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve. Montrons le point 1. (la preuve du second étant analogue).
Soit $A > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \geq A$. En posant $N_2 = \max(N, N_1)$, on obtient : $\forall n \geq N_2,\ v_n \geq A$. La suite (v_n) tend donc vers $+\infty$. □

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Etudier la limite de (u_n).

On sait que $\sqrt{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$. Étudier la limite de (H_n).

On a pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant, on obtient :
$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$
Ainsi, $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n)+1$. Donc $\lim H_n = +\infty$, et on obtient de plus par théorème d'encadrement que $\lim \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

3.2 Convergence des suites monotones bornées

Théorème 13 (Théorème de la limite monotone)

(1) Toute suite (u_n) croissante et majorée de réels converge, et a pour limite :
$$\lim u_n = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}.$$
Toute suite (u_n) croissante non-majorée de réels diverge vers $+\infty$.

(2) Toute suite (u_n) décroissante et minorée de réels converge, et a pour limite :
$$\lim u_n = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}.$$
Toute suite (u_n) décroissante et non-minorée de réels diverge vers $-\infty$.

Preuve.

- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. Notons $A = \{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. A est non vide car contient u_0, et majoré (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée). Ainsi A admet une borne supérieure, noté L.

  Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $L - \epsilon < x$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_N$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $L - \epsilon < u_N \leq u_n \leq L$ (car L majore A). Ainsi $|u_n - L| \leq \epsilon$ et on a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. L majore A, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq L$.

- Supposons maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée. On a donc :
$$\text{non } (\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M) \quad \text{c'est à dire} \quad (\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M)$$
  Soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Puisque la suite (u_n) est croissante, on en déduit que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$ et on a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

□

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus
$$u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge (et on peut montrer que ça limite est $\frac{\pi^2}{6}$!).

3.3 Convergence des suites adjacentes

Définition.

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ;
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 14 (Théorème des suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante. Alors :

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l ;

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0.$$

La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme elle converge vers 0, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geq 0$ i.e. $u_n \leq v_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. D'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent, disons vers l_1 et l_2. Par opérations sur les limites, $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_2 - l_1$ et par unicité de la limite, $l_2 - l_1 = 0$, donc $l_1 = l_2$. □

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, les suites des valeurs approchées par défaut et excès de x, définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \text{ et } v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$$

forment deux suites adjacentes convergeant vers x.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$. Etablir que ces suites sont adjacentes.

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge clairement vers 0.

Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite.

Remarque.

- On avait montré dans un cours précédent que la limite commune de ces deux suites est e. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $u_n \leq e \leq v_n$, u_n est une approximation de e à précision plus petite que $\frac{1}{n(n!)}$. On a par exemple que $u_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{2}{3} \approx 2,67$ est une approximation de e à précision plus petite que $\frac{1}{18}$.

- On peut déduire de ces suites que e est un irrationnel : par l'absurde supposons que $e = \frac{p}{q}$. On a $u_q < e < v_q$, et comme u_q est un rationnel et peut s'écrire $\frac{N}{q!}$ $(N \in \mathbb{N})$,
$$u_q \frac{N}{q!} < e = \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!} = \frac{N}{q!} + \frac{1}{qq!} \text{ ou } N < p(q-1)! < N + \frac{1}{q}.$$
L'entier $p(q-1)!$ est donc strictement compris entre les deux entiers consécutifs N et $N+1$. Impossible !

4 Suites extraites

Définition.

On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou encore sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque. On vérifie par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\varphi(n) \geq n$" pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Comme $\phi(0) \in \mathbb{N}$, $\phi(0) \geq 0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n$ (car ϕ strictement croissante et par hypothèse de récurrence). Ainsi $\phi(n+1) \geq n+1$ (car ce sont des entiers) et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

En conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple.

- $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\geq 1}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelées suites extraites paire et impaire.

Propriété 15

Toute suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente converge vers la même limite $\lim u_n$.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \epsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n \geq N$ d'après ce qui précède, donc $|u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$. Ainsi $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

► *Pour montrer qu'une suite diverge, on se sert souvent de la contraposée de ce théorème : si on trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exemple. ♦ La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (ses suites extraites paires $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impaires $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1 et -1).
♦ La suite des $v_n = \cos(n\pi/2)$ diverge.

Exercice. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

5 Suites récurrentes

5.1 Cas particuliers

Définition.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
- arithmético-géométrique s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarque. Calcul du n^{ieme} terme des suites précédentes.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + na$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0q^n$.
- Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique avec $a \neq 1$, on définit le point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ par $\alpha = a\alpha + b$. On a donc :
$$u_{n+1} = au_n + b \text{ et } \alpha = a\alpha + b.$$
Par différence, on en déduit que pour tout $n \in\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison a, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = a^n(u_0 - \alpha) \Leftrightarrow u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha).$$

Exercice. Un individu I_0 dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux). Il la transmet à I_1, qui la transmet à I_2, ..., qui la transmet à I_n. Chacun transmet l'information reçu (ou son inverse) avec la probabilité p (ou $1-p$). Quelle est la probabilité p_n pour que I_n dispose de l'information correcte ?

Notons V_k l'évènement : "I_k apprend l'information initiale correcte", et $\overline{V_k}$ l'évènement contraire. Par la formule des probabilités totales :

$$P(V_{k+1}) = P(V_{k+1}/V_k)P(V_k) + P(V_{k+1}/\overline{V_k})P(\overline{V_k}).$$

Comme $P(V_{k+1}/V_k) = p$ et $P(V_{k+1}/\overline{V_k}) = 1 - p$, on obtient :

$$P(V_{k+1}) = (2p - 1)P(V_k) + (1 - p).$$

$k \mapsto p_k = P(V_k)$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe qui est 0.5. D'où :

$$p_{k+1} = (2p - 1)p_k + (1 - p).$$

$$0.5 = (2p - 1)0.5 + (1 - p).$$

Par différence, $p_{k+1} - 0.5 = (2p - 1)(p_k - 0.5)$, et donc $p_n = (2p - 1)^n(p_0 - 0.5) + 0.5$.
Comme I_0 a l'information, $p_0 = 1$, d'où $p_n = 0.5((2p - 1)^n + 1)$, et $\lim p_n = 0.5$.

5.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Propriété 16 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas réel))

Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2$ et :$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.
- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors : $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n\left(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\right)$

Exemple. Étude de la suite de Fibonacci.

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Posons $P(r) = r^2 - r - 1$. P admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après le théorème précédent, on peut donc dire :

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à résoudre le système : $(E)\quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}$.
Or,

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff \quad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(r_1 - r_2) = 1 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

5.3 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici aux suites récurrentes définies par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I.

Remarque. Une telle relation de récurrence ne permet pas toujours de bien définir une suite : par exemple il n'existe pas de suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1 - u_n}$. La proposition qui suit permet de garantir l'existence de certaines suites.

Propriété 17

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que I est stable par f (c'est à dire $f(I) \subset I$) et $a \in I$.
Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Preuve. Par récurrence. □

Remarque. Si f est une fonction affine, alors (u_n) est arithmético-géométrique.

Propriété 18 (Monotonie de (u_n))

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Si f est croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone:
   (a) Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
   (b) Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.
2. Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Preuve.

1. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $u_1 \geq u_0$. La relation $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ permet alors de montrer par récurrence que (u_n) est croissante.
   On procède de même si $f(u_0) - u_0 \leq 0$ pour montrer que (u_n) est décroissante
2. Posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I. Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\left(f(u_{2n})\right) = g(u_{2n}) = g(v_n)$ et de même $w_{n+1} = g(w_n)$. Le point 1 permet alors d'en déduire que chacune des suites (v_n) et (w_n) est monotone.
   Supposons, par exemple que (v_n) est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq v_{n+1}$. En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ c'est à dire $w_n \geq w_{n+1}$. La suite (w_n) est donc décroissante.
   Si l'on suppose désormais que la suite (v_n) est décroissante, on peut déduire de la même manière que (w_n) est croissante.

□

Remarque. Pour déterminer la monotonie de (u_n), il peut parfois être intéressant d'étudier le signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur I. En effet, supposons par exemple que : $\forall x \in I,\ f(x) - x \geq 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait croissante.

Propriété 19 (Convergence de (u_n))

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in I$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est continue sur I et si (u_n) converge vers l alors $f(l) = l$. On dit que l est un point fixe de f.

Preuve. Cette preuve utilise la caractérisation séquentielle de la limite qui sera démontrée dans un chapitre ultérieur. □

Exercice. Etudier la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ et $u_0 \geq -1$.

6 Brève extension aux suites complexes

Définition.

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbb{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, ... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes !). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant pas le module.

Définition.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \exists N \in \mathbb{N} \ , \forall n \in \mathbb{N}, \Big(n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon\Big).$$

Remarque. Il n'existe pas de limite infinie.

Propriété 20

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} Re(u_n) + i \lim_{n\to+\infty} Im(u_n).$$

Preuve. • Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|Re(u_n) - Re(l)| = |Re(u_n - l)| \leq |u_n - l|$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$, donc $(Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Re(l)$. De même $(Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Im(l)$.
• Supposons que $(Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, disons vers a et b. On pose $l = a + ib$. Alors, par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq |Re(u_n - l)| + |Im(u_n - l)| \leq |Re(u_n) - a| + |Im(u_n) - b|$. Comme $(|Re(u_n) - a| + |Im(u_n) - b|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l. $\square$

Propriété 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{l}$.

Propriété 22 (Opérations sur les limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes qui convergent respectivement vers l et l'.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{C}^*$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

Preuve. Même démonstration que pour les suites réelles en remplaçant les valeurs absolues par des modules. $\square$

Propriété 23

Toute suite complexe convergente est bornée.

Preuve. Même démonstration que pour les suites réelles en remplaçant les valeurs absolues par des modules. □

En résumé :

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable :**
Unicité de la limite	Majorant/minorant
Une suite convergente est bornée	Monotonie
Opérations sur les limites	Limites infinies
Suites extraites	Passage à la limite des $\leq$
	Théorème des gendarmes
	Théorème de la limite monotone
	Suites adjacentes

Propriété 24 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas complexe))

Soient $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0,u_1) \in \mathbb{C}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors: $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.

Remarque. L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.