Chapitre 1

# Fonctions de la variable réelle




Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en supérieures PCSI au Lycée Saint Louis (Paris)
mansuy.mathieu@hotmail.fr

# 1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

## 1.1 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

**Propriété 1**

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total, c'est à dire qu'elle possède les propriétés suivantes :

(1) Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$

(2) Antisymétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$

(3) Transitivité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$

(4) Elle est totale : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$.

**Propriété 2** (Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication)

Soient $a, b, c, d$ des nombres réels.

(1) $a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$.

(2) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

(3) Pour tout $c < 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \geq bc$.

(4) Pour tout $c > 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \leq bc$.

(5) Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

(6) Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ou $a, b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

**Exemple** ♦ Pour $x \leq y \in [0, 1[$, $\frac{x}{1-x} \leq \frac{y}{1-y}$. En effet $-x \geq -y$, donc $1 - x \geq 1 - y > 0$ (car $y < 1$) puis $0 < \frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{1-y}$. Comme $0 \leq x \leq y$, on obtient le résultat voulu en multipliant ces inégalités.
♦ Résolvons l'inégalité $\frac{x-1}{x+3} < 2$ :

- si $x + 3 > 0$, cette inégalité équivaut à $x - 1 < 2(x + 3)$, donc à $x > -7$. Comme $x > -3$, l'inégalité est toujours vérifiée dans ce cas.
- Si maintenant $x + 3 < 0$, l'inégalité équivaut à $x - 1 > 2(x + 3)$, donc à $x < -7$.

L'ensemble des solutions est donc $] - \infty, -7[\cup] - 3, +\infty[$.

## 1.2 Valeur absolue

**Définition.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de $a$ est le nombre réel noté $|a|$ défini par:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{si} \quad a \leq 0. \end{cases}$$

**Propriété 3** (Inégalité triangulaire)

Pour tous réels $a, b$,

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|\,.$$

**Preuve.** L'inégalité $|a + b| \leq |a| + |b|$ a déjà été démontrée dans un cours précédent. On démontre la deuxième inégalité ici. Pour cela, on utilise que

$$|z| \leq m \Leftrightarrow -m \leq z \leq m.$$

On va donc montrer que $-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$ :

- $|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$. D'où $|a|-|b| \leq |a+b|$.
- $|b| = |b+a-a| \leq |a+b| + |a|$. D'où $|b|-|a| \leq |a+b|$, soit encore $|a|-|b| \geq -|a+b|$.

$\square$

**Exemple.** ⧫ Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-2| \leq 1$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $-5 \leq y \leq -4$. Encadrons $x+y$, $x-y$, $xy$, $\frac{x}{y}$.
On a $1 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq -4$.
Ainsi, $-4 \leq x+y \leq -1$, $5 \leq x-y \leq 8$, $-15 \leq xy \leq -4$, $-\frac{3}{4} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{5}$.
⧫ Pour $(x,y) \in ]-1,1[^2$, $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$. En effet, puisque $0 \leq |x| < 1$ et $0 \leq |y| < 1$ alors $|xy| < 1$. Ainsi, $1+xy > 0$. Pour $(x,y) \in ]-1,1[^2$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 &\Longleftrightarrow |x+y| \leq 1+xy \\
&\Longleftrightarrow -1-xy < x+y < 1+xy \\
&\Longleftrightarrow 0 < x+y+xy+1 \text{ et } 0 < 1+xy-x-y \\
&\Longleftrightarrow 0 < (1+x)(1+y) \text{ et } 0 < (1-x)(1-y)
\end{aligned}$$

La première inégalité est vraie car $x > -1$ et $y > -1$. La seconde inégalité est également vraie car $x < 1$ et $y < 1$. En remontant les équivalences, on a donc prouvé l'inégalité voulue.

## 1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition.**

Soit $I$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $I$ est un **intervalle** dans les quatre cas suivants :

- $I = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$, $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\})$, et on note $I = ]a,b[$ ;
- $I = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$, $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}) \times \mathbb{R}$, et on note $I = ]a,b]$ ;
- $I = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\})$, et on note $I = [a,b[$;
- $I = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et on note $I = [a,b]$.

**Propriété 4** (Intervalles et valeur absolue)

Soient $a$ un réel quelconque et $r$ un réel strictement positif. Alors:

(1) $|x-a| \leq r$ est équivalent à $x \in [a-r, a+r]$.

(2) $|x-a| \geq r$ est équivalent à $x \in ]-\infty, a-r]$ ou $x \in [a+r, +\infty[$.

Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.

**Interprétation géométrique.** La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si $a$ et $x$ sont deux réels, $|x-a|$ est la **distance** de $a$ à $x$. Si $r \geq 0$, l'inégalité $|x-a| \leq r$ signifie que $x$ est à une distance de $a$ inférieure ou égale à $r$.

## 1.4 Majorant et minorant - Maximum et minimum

**Définition.**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.

- $A$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$.
  On dit alors que $M$ est un majorant de $A$.
- $A$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \geq m$.

On dit alors que $m$ est un minorant de $A$.

- $A$ est **bornée** lorsque $A$ est à la fois majorée et minorée.

**Remarque.** La partie $A$ est bornée si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leq m$.

**Définition.**

- Si $A$ est majorée et possède un majorant qui est dans $A$, alors celui-ci est unique. On l'appelle **maximum** de $A$ et on le note $\max A$.
- Si $A$ est minorée et possède un minorant qui est dans $A$, alors celui-ci est unique. On l'appelle **minimum** de $A$ et on le note $\min A$.

**Preuve.** Justifions l'unicité du maximum : supposons que $x$ et $x'$ sont deux plus grand éléments de $A$. Puisque $x$ est un maximum de $A$, on a : $\forall a \in A,\ x \leq a$. Or, $x' \in A$, donc $x \leq x'$. De même, en utilisant le fait que $x'$ est un maximum de $A$, on obtient : $x' \leq x$. Finalement, $x = x'$. $\square$

**Exemples.** Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum.

$$A = \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad B = [0, 1[ \quad ; \quad C = \mathbb{Z} \quad ; \quad D = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

# 2 Généralités sur les fonctions

## 2.1 Définitions

**Définition.**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de $A$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On appelle **domaine de définition** de $f$ l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in A \text{ tels que } f(x) \text{ existe }\}.$$

Si $x \in \mathcal{D}_f$ et si $y = f(x)$, on dit que :

- $y$ est l'image de $x$ par $f$,
- $x$ est un antécédent de $y$ par $f$ (pas forcément unique).

▶ *Étant donné une fonction $f$, il faudra toujours commencer par préciser le domaine de définition de $f$.*

**Exemple.** ⧫ Déterminons le domaine de définition de $f : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{\cos(2x)}$.

- La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $-x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3) \geq 0$ pour $x \in [2, 3]$. On en déduit que la fonction $f$ est définie sur $[2, 3]$.
- La fonction $g$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(2x) \neq 0$. Or $\cos(2x) = 0$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit encore $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Ainsi, on obtient $\mathcal{D}_g = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right[$.

**Définition.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle commun $I$.

(1) La **somme de** $f$ **et** $g$ est la fonction notée $(f + g)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

(2) Le **produit de** $f$ **et** $g$ est la fonction notée $f \times g$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

est encore continue sur $I$.

(3) Supposons de plus que $g$ ne s'annule pas sur $I$. Le **quotient de** $f$ **par** $g$ est la fonction notée $\dfrac{f}{g}$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Définition.**

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction définie sur un intervalle $J$ telles que $f(I) \subset J$. La **composée de** $f$ **par** $g$ est la fonction, notée $g \circ f$, définie pour tout $x \in I$ par :

$$\forall\, x \in I,\ (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

## 2.2 Représentation d'une fonction

**Définition.**

Soit $f$ une fonction de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **courbe représentative** de $f$, et on note $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ $(x \in \mathcal{D}_f)$ du plan dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

**Propriété 5**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de $f$ par une translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
- $x \mapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de $f$ par une translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
- $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de $f$ par une symétrie d'axe $x = a/2$.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de $f$ par une dilatation horizontale de rapport $1/a$.
- $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de $f$ par une dilatation verticale de rapport $a$.

**Exemple.** Représenter la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2} - 1$ à partir de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$. Déterminer alors graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{(x-1)^2}{2} - 1 \leq -1/2$.

Pour tracer le graphe de $f$ à partir de la courbe de $x \mapsto x^2$, on effectue successivement :

- une translation de vecteur $\vec{i}$ ;
- une dilatation verticale de rapport $1/2$ ;
- une translation de vecteur $-\vec{j}$.

Les solutions de l'inéquation $\frac{(x-1)^2}{2} - 1 \leq -1/2$ sont alors l'ensemble des $x \in [-1, 3]$ pour lesquels la courbe est située en dessous de la droite $y = -1/2$. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $[0, 2]$.

## 2.3 Parité, imparité, périodicité

**Définition.**

- Une fonction $f$ est **paire** lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que:
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x).$$
- Une fonction $f$ est **impaire** lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que:
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x).$$
- Une fonction $f$ est **$T$-périodique** ($T > 0$) si :
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x + T \in \mathcal{D}_f.$$
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(x + T) = f(x).$$

**Exemples.**

- $x \mapsto x^2, |x|, \cos(x)$ sont paires.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}, x, x^3, \sin(x), \tan(x)$ sont impaires.
- cos, sin sont $2\pi$-périodiques, tan est $\pi$ périodique. Si $a > 0$, $x \mapsto \cos(ax)$ est $\dfrac{2\pi}{a}$-périodique.
- $x \mapsto x^n$ a la parité de $n$.

**Propriété 6** (Interprétation graphique de la parité)

(1) Une fonction $f$ est **paire** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

(2) Une fonction $f$ est **impaire** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

(3) Une fonction $f$ est **T-périodique** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **invariante par translation de vecteur** $T\overrightarrow{i}$.

**Preuve.** Montrons par exemple le premier point (les autres points se démontrent de manière analogue). Supposons $f$ paire et notons $G$ son graphe. Si $M = (x, y) \in G$, on a $y = f(x)$. Le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des ordonnées est $(-x, y) = (-x, f(x)) = (-x, f(-x)) \in G$, donc $G$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Réciproquement, supposons que $G$ soit symétrique par rapport à $(Oy)$. Alors d'une part $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. De plus si $(x, y) \in G$, alors $(-x, y) \in G$, et on a $y = f(x) = f(-x)$. Ainsi $f$ est paire. □

► *Lorsqu'une fonction sera paire ou impaire, on restreindra son étude au domaine $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$ et on complétera la courbe par une simple symétrie. Si la fonction est $T$-périodique, on restreindra son étude à un segment de longueur $T$ et on complétera la courbe par translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.*

**Exemple.** ⧫ Déterminons le domaine d'étude de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1}$.

- Dans un premier temps, on remarque que la fonction est $\pi$-périodique. On restreint l'étude de $f$ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Dans un deuxième temps, on note que $f$ est également paire. On peut donc restreindre le domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Le domaine d'étude de $f$ est donc $[0, \frac{\pi}{2}[$. Lors de la représentation graphique, on pensera à compléter la courbe par une symétrie d'axe $(Oy)$, puis par une translation de vecteur $\pi\vec{i}$.
⧫ Attention à l'erreur suivante : $f(x) \leq f(x+1)$ pour tout $x$ n'implique pas que $f$ est croissante (prendre par exemple $x \mapsto \cos(2\pi x)$).

## 2.4 Fonctions et relations d'ordre

**Définition.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

- La fonction $f$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur $I$ si pour tout $x \leq y$ (resp. $x < y$), $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).
- La fonction $f$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur $I$ si pour tout $x \leq y$ (resp. $x < y$), $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).
- La fonction $f$ est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur $I$ si $f$ est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur $I$.

**Exemple.** La fonction cos est :

- décroissante sur tout intervalle de la forme $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $(k \in \mathbb{Z})$,
- croissante sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $(k \in \mathbb{Z})$. Mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

**Propriété 7**

La composée de deux fonctions monotones est monotone (et la règle des signes donne le sens de monotonie).

**Remarque.** On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général ! Par exemple $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x$ également, mais pas $x \mapsto x^2 - x$ !

**Définition.**

- Une fonction $f$ est dite **majorée** lorsqu'il existe un réel $M$ tel que: $\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \leq M$. Le réel $M$ est alors appelé un **majorant** de $f$.
- Une fonction $f$ est dite **minorée** lorsqu'il existe un réel $m$ tel que: $\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \geq m$. Le réel $m$ est alors appelé un **minorant** de $f$.
- Une fonction $f$ est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

**Propriété 8**

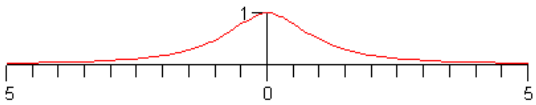
Une fonction $f$ est bornée si et seulement si $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

**Preuve.** Supposons $f$ bornée. Alors $f$ est minorée et majorée, donc on a $m$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$. Soit $N = \max(|m|, |M|)$, alors pour $x \in I$, $-N \leq m \leq f(x) \leq M \leq N$, donc $|f(x)| \leq N$.
Supposons maintenant avoir $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$. Alors pour $x \in I$, $-M \leq f(x) \leq M$, donc $f$ est minorée (par $-M$) et majorée (par $M$). □

**Exemple.** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, est majorée par 1 et minorée par 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 0 < f(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leq 1$. Voici la courbe représentative de $f$:




**Définition.**

Soit $f$ une fonction et $x_0$ un point de $\mathcal{D}_f$.

- $f$ admet un **maximum global** (resp. **minimum global**) en $x_0$, lorsque :
$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$
On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in \mathcal{D}_f} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathcal{D}_f} f(x)$).
- $f$ admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en $x_0$ s'il existe un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ contenant $x_0$ tel que :
$$\forall\, x \in I,\ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$
On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x)$).

**Exemples.** ♦ Reprenons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ de l'exemple précédent. $f$ admet un maximum global en 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 = f(0).$$

Par contre, elle n'admet pas de minimum global. En effet, si $f$ admet un minimum global en $x_0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(x_0)$. Or si $x$ est "assez grand", on a:

$$1 + x^2 > 1 + x_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+x_0^2} \Leftrightarrow f(x) < f(x_0).$$

On obtient donc une contradiction, donc $f$ n'admet pas de minimum global.

♦ La fonction $g(x) = x^3 - 3x$, définie sur $\mathbb{R}$, admet un maximum local en $-1$. En effet, $g(-1) = 2$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(-1) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$ d'où: $\forall\, x \in ]-\infty, 2]$, $g(x) \leq g(-1)$.

**Exercice.** Écrire à l'aide de quantificateurs :

- $f$ est non majorée par $M$ : $\exists x \in I,\ f(x) > M$.
- $f$ est non minorée : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) < m$.
- $f$ est non bornée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ |f(x)| > x$.
- $f$ n'est pas croissante : $\exists x, y \in I,\ x < y$ et $f(x) > f(y)$
- $f$ n'est pas monotone : $\exists x, y, z, t \in I,\ x < y,\ z < t$ et $f(x) > f(y),\ f(z) < f(t)$.

## 2.5 Limites d'une fonction de la variable réelle

**Propriété 9** (opérations sur les limites)

Pour calculer la limite d'une fonction, on sera amené à utiliser ces règles de calcul qu'on démontrera dans un prochain chapitre, et dont on retiendra les **formes indéterminées**:

(1) soient $l, l' \in \mathbb{R}$,

| si $f$ a pour limite | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| si $g$ a pour limite | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $f+g$ a pour limite | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

(2) soient $l, l' \in \mathbb{R}$,

| si $f$ a pour limite | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| si $g$ a pour limite | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ *ou* $-\infty$ |
| alors $fg$ a pour limite | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. |

(3) soient $l, l' \in \mathbb{R},\ l' \neq 0$,

| si $f$ a pour limite | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ *ou* $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| si $g$ a pour limite | $l'$ | $+\infty$ *ou* $-\infty$ | $l'>0$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $l'<0$ | $+\infty$ *ou* $-\infty$ |
| alors $\frac{f}{g}$ a pour limite | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. |

Et dans le cas particulier où $l'$ est nul,

| si $f$ a pour limite | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| si $g$ a pour limite | $0+$ | $0-$ | $0+$ | $0-$ | $0$ |
| alors $\frac{f}{g}$ a pour limite | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. |

**Exemple.** ♦ Calculons la limite quand $x \to +\infty$ de : $f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4}$
On est ici dans le cas d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$". On peut cependant lever cette indétermination en factorisant en haut et en bas par $x$ :

$$\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4} = \frac{x^2}{x^4} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} - 1} = \frac{1}{x^2} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} - 1}.$$

Par la propriété d'opérations sur les limites, on obtient que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

♦ Calculons la limite quand $x \to +\infty$ de : $g(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}$.
Là aussi, on est dans le cas d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$". Pour lever l'indétermination, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\frac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{x}(2+\sqrt{4-\frac{1}{x}})}{(2-\sqrt{4-\frac{1}{x}})(2-\sqrt{4-\frac{1}{x}})} = \frac{\frac{1}{x}(2+\sqrt{4-\frac{1}{x}})}{(4-4+\frac{1}{x})} = 2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}.$$

**Remarque.** On retiendra que pour lever l'indétermination, on peut éventuellement transformer l'expression algébrique donnée: développement, factorisation, quantité conjuguée...

**Propriété 10** (limite d'une fonction composée)

Soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g$ deux fonctions pour lesquelles on suppose $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$. Alors, sous réserve d'existence, la fonction composée $g \circ f$ vérifie:

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c.$$

**Remarque.** Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable; on ne s'intéresse plus à la limite de $g\circ f(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(X)$ quand $X \to b$.

**Exemple.** Calculer la limite quand $x \to 0$ de la fonction: $x \mapsto \frac{\ln^2(x)+2\ln(x)}{\ln^2(x)+1}$.
On a $\lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$. On étudie alors la limite quand $X \to -\infty$ de $\frac{X^2+2X}{X^2+1}$ :

$$\frac{X^2+2X}{X^2+1} = \frac{1+2\frac{1}{X}}{1+\frac{1}{X^2}}.$$

Ainsi $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{X^2+2X}{X^2+1} = 1$, et par propriété de limite d'une composée $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

**Propriété 11** (Étude des branches infinies)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors $C_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

(2) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, alors $C_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$.

## 2.6 Continuité

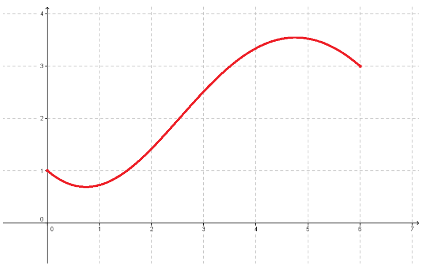
**Définition.**

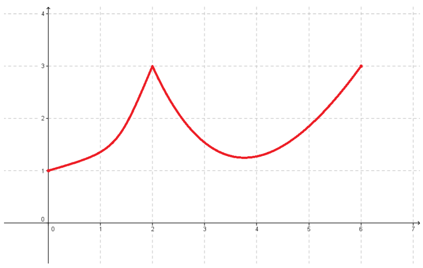
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

- On dit que $f$ est **continue** en un point $a \in I$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que $f$ est **continue** sur un intervalle $I$ si elle est **continue** en tout point de $I$.

**Interprétation graphique.** Une fonction $f$ est **continue** sur un intervalle $I$ si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un "trait continu", sans lever le crayon.

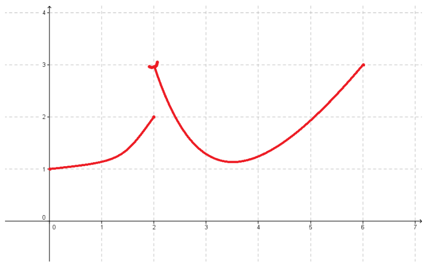
**Exemples.** ♦ Fonctions continues sur $[0, 6]$:



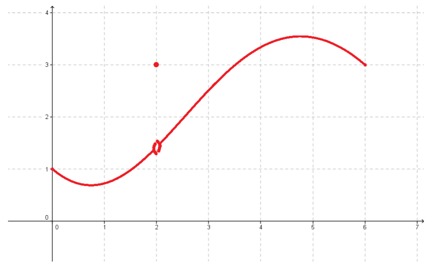


Brisée en 2

♦ Fonctions discontinues sur $[0, 6]$:



Avec un saut en 2



Avec un "trou" en 2

**Propriété 12** (Opérations sur les fonctions continues)

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I$.

(1) Les fonctions $(f + g)$ et $f \times g$ sont encore continues sur $I$.

(2) Supposons que $g$ ne s'annule pas sur $I$. La fonction $\dfrac{f}{g}$ est encore continue sur $I$.

**Propriété 13** (Composée de fonctions continues)

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction continue sur un intervalle $J$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est encore continue sur $I$.

## 2.7 Bijectivité, réciproque d'une bijection

**Définition.**

Soit $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs dans $J$. On dit qu'elle est **bijective** si tout élément de $J$ admet un unique antécédent par $f$.
On appelle alors **bijection réciproque** la fonction notée $f^{-1}$ qui à tout $y \in J$ associe l'unique antécédent de $y$ par $f$, de sorte que :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

**Théorème 14** (de la bijection)

Soit $f$ est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Alors :

(1) $f$ réalise une **bijection** de $I$ dans l'intervalle $J = f(I)$ ;

(2) son application réciproque $f^{-1}$ est elle-même **continue** sur $J$, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que $f$.

**Propriété 15**

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation** $y = x$.

**Preuve.** Notons $G$ le graphe de $f$ et $G'$ celui de $f^{-1}$. Soit $M = (x, y)$ un point de $G$, alors $y = f(x)$. Le symétrique de $M$ par rapport à la première bissectrice est $(y, x) = (f(x), x) = (f(x), f^{-1}(f(x)))$, donc est dans $G'$.

Réciproquement, si $M = (x, y)$ est un point de $G'$, $y = f^{-1}(x)$. $M$ est le symétrique par rapport à la première bissectrice du point $(y, x) = (f^{-1}(x), x) = (f^{-1}(x), f(f^{-1}(x)))$, donc d'un point de $G$. $\square$

**Exemple fondamental.** La **fonction carrée** $f : x \mapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car, par exemple, $f(-1) = f(1) = 1$.

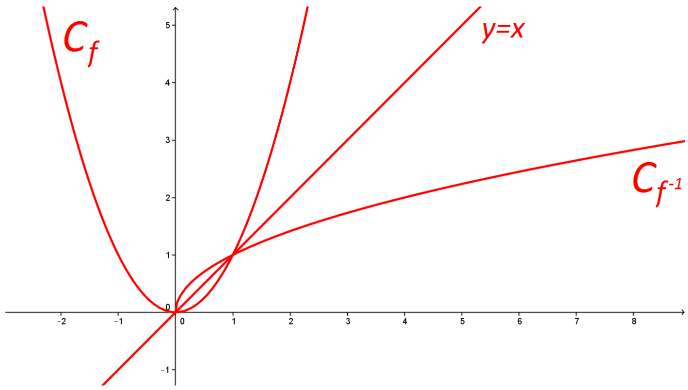
Considérons la restriction de $f$ sur $\mathbb{R}_+$. $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et le théorème de la bijection permet de conclure que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui est la **fonction racine carré** :

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = x \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Grâce au théorème de la bijection, on en déduit que la fonction racine carrée est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est strictement croissante sur cet intervalle.

Voici les courbes représentatives de la **fonction carrée** $\mathcal{C}_f$ et de la **fonction racine carrée** $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ (on pourra remarquer qu'elles sont bien symétriques par rapport à la droite $y = x$ sur $\mathbb{R}^+$):




► *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. Pour montrer que $f$ est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes:*

- **Méthode 1**: *On montre que $f$ est continue et strictement monotone sur $I$. Alors, d'après le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de l'intervalle $I$ sur l'intervalle $J = f(I)$.*
  *Cette méthode est simple à appliquer car il suffit de justifier que $f$ est continue sur $I$ et d'étudier ses variations pour montrer qu'elle est bijective. Par contre, cette méthode ne donne pas l'expression de la bijection réciproque $f^{-1}$ de $f$.*

**Exemple.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Démontrer que $f$ réalise une bijection de l'intervalle $I = [-1, 0]$ sur un intervalle $J$ à déterminer.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$.

La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. Elle est de plus dérivable, et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $f$ est strictement croissante. Par le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $[-1, 0]$ sur l'intervalle $f([-1, 0]) = [-1, 1]$. Puisqu'enfin $0 \in [-1, 1]$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$.

- **Méthode 2**: *On montre que l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x$) possède une unique solution qui est $x = f^{-1}(y)$.*
  *Cette méthode, en générale plus compliquée que la précédente, permet d'obtenir l'expression de la bijection réciproque $f^{-1}$ de $f$.*

**Exemple.** Soit $g$ la fonction définie par:

$$g : \begin{cases} ]-1, +\infty[ & \to & ]-\infty, 1[ \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{cases}$$

Montrer que $g$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Tout d'abord $g$ est bien définie : en effet pour $x > -1$, on a $x+1 > 0$ et le quotient $\frac{x-1}{x+1}$ est bien défini. De plus pour tout $x > -1$, on a :

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \in ]-\infty, 1[.$$

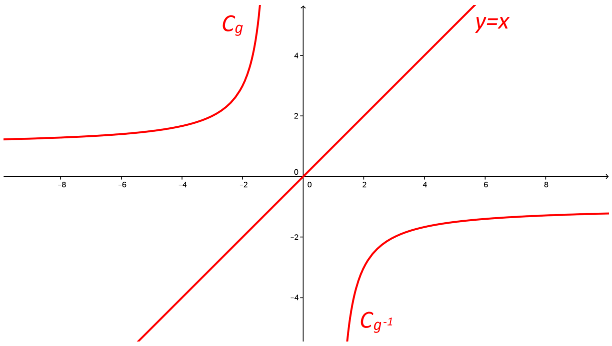
Soit $y < 1$. on résout l'équation $y = g(x)$ :

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow x(y-1) = -1-y \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y} = -1 + \frac{2}{1-y}.$$

Ainsi $g$ est bijective et son application réciproque $g^{-1}$ est donnée par

$$g^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} ]-\infty, 1[ & \rightarrow & ]-1, +\infty[ \\ y & \mapsto & \dfrac{1+y}{1-y} \end{array} \right.$$

Voici les courbes représentatives de $g$ et de $g^{-1}$ :




## 2.8 Dérivabilité

**Définition.**

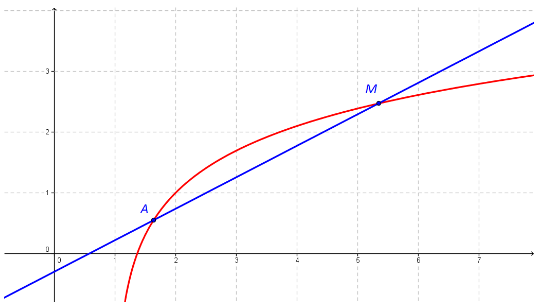
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$. On dit que $f$ est **dérivable** en $a$ si le **taux d'accroissement** de $f$ entre $x$ et $a$ :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad (x \neq a),$$

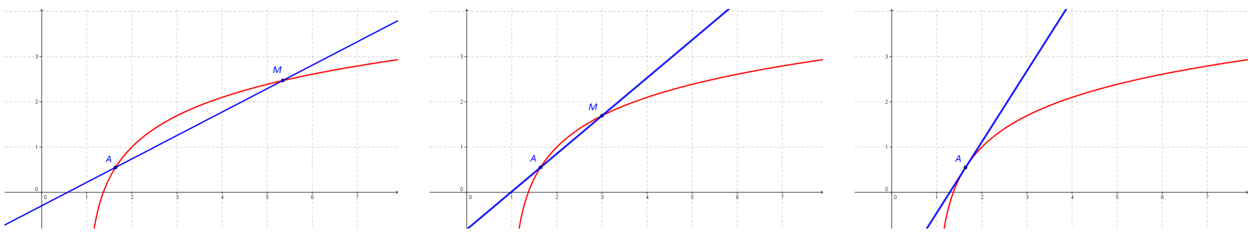
admet une limite finie quand $x$ tend vers $a$. Dans ce cas, la limite est appelée **nombre dérivé de $f$ en $a$** et est noté $f'(a)$. On note alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

**Interprétation graphique.** Fixons $a \in I$ et considérons $x \in I$, $x \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ un point courant. Le taux d'accroissement désigne le coefficient directeur de la corde $(AM)$.




$f$ est donc dérivable en $a$ si la corde admet une position limite lorsque le point $M$ tend vers le point $A$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A$:



**Propriété 16** (Équation d'une tangente)

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a$, alors l'**équation de la tangente** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$ au point $(a, f(a))$ est:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

En particulier, $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente en $a$ à la courbe représentative de $f$.

**Remarque.** Lorsque le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$, la courbe admet une tangente verticale en A.

**Définition.**

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable sur** $I$ si $f$ est dérivable en tout point de $I$.
On appelle **fonction dérivée** de $f$ sur $I$, que l'on note $f'$ (ou $\frac{df}{dx}$), la fonction qui à tout $x$ de $I$ associe le nombre dérivé de $f$ en $x$.

**Propriété 17** (Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

(1) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$), alors $f$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur $I$.

(2) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors $f$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur $I$.

(3) Si $\forall\, x \in I$, $f'(x) = 0$, alors $f$ est **constante** sur $I$.

**Remarque.** Si $f'$ est positive (resp. négative) sur $I$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $I$.

**Propriété 18** (Continuité et dérivabilité)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. Si $f$ est **dérivable** sur $I$, alors $f$ est **continue** sur $I$.

**Preuve.** Fixons $a, x \in I$, $a \neq x$. Alors $f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) + f(a)$. Le membre de droite a bien une limite quand $x$ tend vers $a$, qui est $f(a)$. Ainsi $f$ est bien continue en $a \in I$, et donc sur $I$. $\square$

**Remarque.** La réciproque est fausse: une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, les fonctions valeur absolue ou racine carrée sont continues en 0 et non dérivable en 0.

**Propriété 19** (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient $f, g$ deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) La **combinaison linéaire** $\lambda f + \mu g$ est encore dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$:

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

(2) Le **produit** $fg$ est encore dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(3) Supposons que $g$ ne s'annule pas sur $I$. Le **quotient** $\dfrac{1}{g}$ est encore dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}.$$

(4) Supposons que $g$ ne s'annule pas sur $I$. Le **quotient** $\dfrac{f}{g}$ est encore dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

**Propriété 20** (Composée de fonctions dérivables)

Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ telles que $f(I) \subset J$.
Alors la fonction $g \circ f$ est encore dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

**Propriété 21** (Dérivée de l'application réciproque d'une bijection)

Soit $f$ une fonction bijective de $I$ dans $J$. Si $f$ est **dérivable** sur $I$ et si $f'$ **ne s'annule pas** sur $I$, alors $f^{-1}$ est **dérivable** sur $J$ et :

$$\forall\, y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Exemple.** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ est bijective (comme vu plus haut) de réciproque : $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$. $f$ est dérivable (car polynomiale) et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$. Ainsi, $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}_+^*$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

**Définition.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit récursivement :

- Pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$ ;
- Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable sur $I$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Si, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$, et on appelle $f^{(n)}$ **la dérivée** $n^{ieme}$ **de** $f$ **sur** $I$.

**Remarque.** Ainsi on a $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, ...

**Exemple.** ♦ Soit $f$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "pour tout $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$". On montre que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

*Initialisation :* $n = 0$ : $f^{(0)}(x) = \frac{1}{x}$ et $(-1)^0 \frac{0!}{x^1} = \frac{1}{x}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

*Hérédité :* Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a par hypothèse de récurrence que pour tout $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. La fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables, et on a pour tout $\forall x \in \mathbb{R}^*$ :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n n! \frac{-(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$. On conclut par principe de récurrence.

♦ Soit $f(x) = \sin(x)$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
De même on procède par récurrence en notant $\mathcal{P}(n)$ la proposition " $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$".

*Initialisation :* $n = 0$ : $f^{(0)}(x) = f(x) = \sin(x) = \sin(x + 0\frac{\pi}{2})$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

*Hérédité :* Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a par hypothèse de récurrence que pour tout $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. La fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et on a pour tout $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = -\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

D'où la propriété au rang $n+1$. On conclut par principe de récurrence.

# 3 Plan d'étude d'une fonction

Nous terminons en résumant les différentes étapes pour l'étude d'une fonction $f$.

- On commence par déterminer le domaine de définition de $f$.
- On restreint l'intervalle d'étude par parité ou périodicité si c'est le cas.
- Avant de dériver, on justifie que $f$ est continue et dérivable sur l'intervalle d'étude.
- On calcule et on factorise $f'$ puis on détermine son signe en résolvant l'inéquation $f'(x) > 0$. On détermine également les points d'annulation de la dérivée en résolvant $f'(x) = 0$.
- On détermine les limites de $f$ au extrémités du domaine de définition, et selon les cas ses extremum, des valeurs remarquables...
- On dresse le tableau de variation de $f$ en y reportant toutes les informations obtenues.
- On trace la courbe représentative de $f$, en utilisant les éventuelles symétries liées à la parité ou la périodicité.

**Exemple.** On étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - \cos^2(x)$.

- La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cos est $2\pi$ périodique, $f$ est donc également $2\pi$ périodique. On étudie $f$ sur $[-\pi, \pi]$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant les translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Soit $x \in [-\pi, \pi]$ alors $-x \in [-\pi, \pi]$ et : $f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos(x) - \cos^2(x) = f(x)$ (car cos est paire), donc $f$ est paire. On étudie donc $f$ sur $[0, \pi]$ et on effectuera la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir la courbe sur $[-\pi, \pi]$ .

- cos est dérivable sur $[0, \pi]$ donc f est dérivable sur $[0, \pi]$. Soit $x \in [0, \pi]$

$$f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right).$$

On a donc le tableau de variations suivants :

On obtient la courbe :

# 4 Fonctions usuelles

## 4.1 Les fonctions logarithmes

### 4.1.1 La fonction logarithme népérien

**Rappel.** La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 1.

**Définition.**

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction ln définie comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

**Propriété 22**

(1) Pour $x \in \mathbb{R}+^*$, on a $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

(2) ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

(3) ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

**Remarque.** La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est $x \mapsto 1/x$.
Ce résultat a déjà été établi pour $x > 0$, et il reste valable pour $x < 0$ car on a alors :

$$\frac{d}{dx}(\ln(|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Finalement, $x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

**Propriété 23** (propriétés algébriques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

(1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(2) $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$, et donc $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

**Preuve.**

(1) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On pose $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(bx) - \ln(x) - \ln(b)$. $g$ est dérivable comme combinaison linéaire et composée de fonctions qui le sont, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{b}{bx} - \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi $g$ est constante. Comme $g(1) = \ln(b) - \ln(1) - \ln(b) = 0$, $g$ est constante nulle. Ainsi $g(a) = 0$ puis $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(2) On a $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln(1) = 0$ par la proposition précédente. Ainsi $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

(3) On a avec la proposition précédente, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(4) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln(a^n) = n\ln(a)$.
On a $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) \underset{HR}{=} \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$ et on vérifie donc $\mathcal{P}(n+1)$.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.
Si maintenant $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. On a $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n})$. Or, $-n > 0$ donc en utilisant la récurrence précédente, on obtient : $\ln(a^n) = -(-n)\ln(a) = n\ln(a)$.

□

**Exercice.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Tout d'abord, prenons $x = y = 1$. On obtient $f(1) = 2f(1)$ et donc $f(1) = 0$.
On suppose maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et on dérive l'égalité $f(xy) = f(x) + f(y)$ par rapport à $y \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient $xf'(xy) = f'(y)$. Faisons $y = 1$, il vient que $f'(x) = f'(1)/x$, soit $f'(x) = \beta/x$ si on pose $\beta = f'(1)$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \beta \ln(x) + \gamma$, donc $f(x) = \beta \ln(x)$ puisque $f(1) = 0$.
Inversement, $x \mapsto \beta \ln(x)$ vérifie la relation proposée pour tout choix du réel $\beta$.

**Propriété 24** (limites)

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad (2)\ \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \quad (3)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad (4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

**Preuve.**

(1) La fonction ln est croissante, donc, par le théorème de la limite monotone, ou bien elle admet une limite finie $L$ en $+\infty$, ou bien elle tend vers $+\infty$ (si elle n'est pas majorée). Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$ d'après le troisième point du corollaire et $\ln(2) > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$. La fonction ln n'est donc pas majorée. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

(2) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln(X)) = -\infty$ par opérations sur les limites.

(3) La fonction ln est dérivable en 1 et on a : $\dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\Longrightarrow} \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

(4) Cette limite s'obtient à partir de la précédente en posant $h = 1 + x$.

□

**Théorème 25**

La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

**Preuve.** On a vu que ln est strictement croissante et dérivable (donc continue), ainsi ln est une bijection strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x); \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\right[ = \mathbb{R}$. □

Terminons par la courbe représentative de ln.

### 4.1.2 La fonction logarithme décimal

**Définition.**

On appelle logarithme décimal (ou de base 10) et on note log (ou $\log_{10}$) la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln(10)}$.

**Remarques.**

- log vérifie les même propriétés que ln, la seule différence est que $\log(10) = 1$ ce qui permet d'avoir $\log(10^n) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Par exemple puisque $\log(46!) \approx 57,76$, on en déduit que 46! est un nombre à 58 chiffres !
- Cette fonction est très utilisée en physique et en chimie. Le ph par exemple, est le logarithme décimal des concentrations. La magnitude d'un séisme est le logarithme décimal de son amplitude.

**Propriété 26**

La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a: $\log(x) = \dfrac{1}{x\ln(10)}$.

## 4.2 La fonction exponentielle népérienne

On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

**Définition.**

On appelle **fonction exponentielle népérienne** sa bijection réciproque notée exp telle que:

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exp(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Propriété 27**

On en déduit immédiatement:

(1) $\exp(0) = 1$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \circ \exp(x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp \circ \ln(x) = x$.

(3) La fonction exp est également continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

**Preuve.** On démontre le dernier point. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective, dérivable, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Ainsi exp est dérivable par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

□

**Propriété 28** (propriétés algébriques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

(2) $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$, et donc $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

**Preuve.** On démontre le premier point : soient $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$. Puisque ln est bijective, il existe $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ uniques tels que $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$, ou encore de manière équivalente $x = \exp(a)$ et $y = \exp(b)$. Alors :

$$\exp(a+b) = \exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(xy)) = xy = \exp(a)\exp(b).$$

Les autres points en découlent astucieusement. □

**Exercice.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f$ dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

***Solution.*** La fonction nulle, et toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \exp(\alpha x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Remarque.** La dernière assertion nous donne en particulier: $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exp(n) = \exp(n.1) = (\exp(1))^n$. Ainsi en posant $e = \exp(1)$ ($e = 2,71828...$, voir ci-dessous), on est ramené à écrire: $\exp(n) = e^n$.
Dans le reste du cours, on choisira d'étendre cette notation puissance aux nombres réels:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$$

**Propriété 29** (limites)

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad (2)\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

On termine en donnant la représentation graphique de la fonction exponentielle.

**Exercice.** Calcul approché du nombre $e$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. Interpréter ce résultat graphiquement.

b) En prenant $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$, en déduire l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

c) En déduire l'encadrement suivant du nombre $e$ pour $n \geq 1$ :

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}.$$

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ainsi qu'une valeur approchée de $e$ à $10^{-2}$ près.

### 4.3 Les fonctions puissances

**Remarque.** On a déjà définit la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ dans les cas suivants :

- lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$ : $p_n$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = x \times x \times \cdots \times x$ ($n$ fois) ;
- lorsque $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ : $p_n$ est définie sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et pour tout $x \neq 0$, $p_n(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$ ($n$ fois) ;
- lorsque $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ : $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de
  - $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si $n$ est impair,
  - $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ si $n$ est pair.

  On définit alors $p_{1/n}$ comme la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ selon que $n$ soit impair ou pair.

Dans tous les cas précédents, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)$. On étend maintenant cette formule pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Définition.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance d'exposant** $\alpha$ la fonction $p_\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}.$$

**Propriété 30**

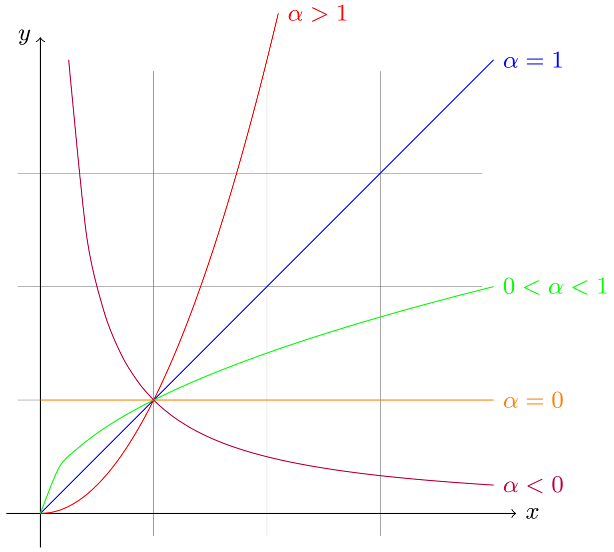
(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction puissance d'exposant $\alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$
La fonction $p_\alpha$ est donc strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa monotonie dépend du signe de $\alpha$.

(2) Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$.
Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$.

**Preuve.** $p_\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. □

**Remarque.** Si $\alpha > 0$, la fonction $p_\alpha$ peut être définie sur $\mathbb{R}_+$ en lieu et place de $\mathbb{R}_+^*$. En effet, nous venons de montrer que dans ce cas, $\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$. On prolonge alors $p_\alpha$ en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$. Ainsi définie, la fonction $p_\alpha$ est alors continue sur $\mathbb{R}_+$. On parle de **prolongement par continuité** de la fonction.

**Interprétation géométrique.** On retiendra ces différentes allures:




Cas $\alpha > 0$ :

Cas $\alpha < 0$ :

**Propriété 31** (règles de calcul)

On a pour tous $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(1)\ \ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad (2)\ \ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad (3)\ \ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad (4)\ \ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

**Propriété 32 (croissances comparées)**

Pour lever certaine indétermination, il est très pratique de connaître le comportement asymptotique des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres.
Pour tous $\alpha, \beta > 0$,

$$(1)\ \ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (2)\ \ \lim_{x\to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad (3)\ \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad (4)\ \ \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

**Preuve.**

(1) **Préliminaire :** montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ :

Soit $x > 1$. Pour $t \in [1, x]$, $\sqrt{t} \leq t$, donc $\displaystyle\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ puis en intégrant (les bornes étant dans le bon sens),

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}.$$

En divisant par $x > 0$, il vient $\displaystyle 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par le théorème des gendarmes, on a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Pour $x > 0$, on a : $\displaystyle\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$. Vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$, on en déduit le résultat de la proposition.

(2) Posons $X = \dfrac{1}{x}$. On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = \lim_{X\to+\infty} X^{-\alpha} (\ln X)^\beta = \lim_{X\to+\infty} \frac{(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$

(3) $\frac{e^{ax}}{x^\alpha} = \exp(-\alpha \ln(x) + ax) = \exp\left(x\left(a - \alpha\frac{\ln x}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par opérations sur les limites.

(4) Posons $t = -x$. On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{ax} = \lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-at} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{at}}{t^\alpha}\right)^{-1} = 0$

$\square$

▶ *Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$ ($u$ à valeur strictement positive), on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture exponentielle $\exp(v(x)\ln(u(x)))$ pour en simplifier l'étude.*

**Exemple.** Etudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

- *Variations de $f$ :*

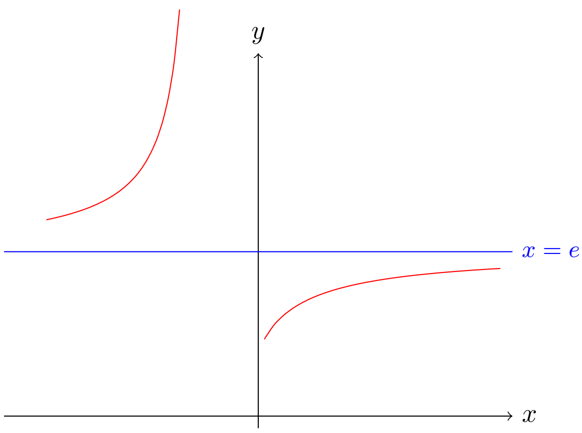
  La fonction $f$ est définie si et seulement si $1+\frac{1}{x} > 0$ donc $\mathcal{D}_f = ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$. $f$ est dérivable sur son ensemble de définition et
$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$
  On ne peut donc pas conclure directement sur le signe de $f'(x)$. On pose $k(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. $k$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,+\infty[$ et
$$k'(x) = \frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$
  Donc $k$ est croissante sur $]-\infty,-1[$, décroissante sur $]0,+\infty[$ et on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$ (par quotient). On en déduite que $k$ est positive sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,+\infty[$. Donc $f$ est croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,+\infty[$.

- *Limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition :*

  Limite en $\pm\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$ (par composition). De même, on trouve que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e$ .

  Limite en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X}\ln\left(1+\dfrac{1}{X}\right)$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ (par croissances comparées) et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{X}\right) = \ln(1) = 0$ par composition. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (par composition). On peut alors prolonger la fonction $f$ par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
  Limite en $-1$ : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+$ donc par composition et produit, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$. Finalement, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ (par composition).

- *Tableau de variations et courbe représentative de $f$ :*




### 4.4 Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Rappelons que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon une comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$ .

**Définition.**

- On appelle alors **fonction cosinus hyperbolique** la partie paire de la fonction exponentielle définie par:
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
- On appelle alors **fonction sinus hyperbolique** la partie impaire de la fonction exponentielle définie par:
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**Remarque.** En particulier, $ch$ est paire, $sh$ est impaire et elles vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = ch(x) + sh(x)\ \text{, ou encore, } e^{-x} = ch(x) - sh(x).$$

De plus on a l'identité, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1.$$

**Propriété 33** (étude de la fonction $ch$)

(1) La fonction $ch$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = sh(x)$.

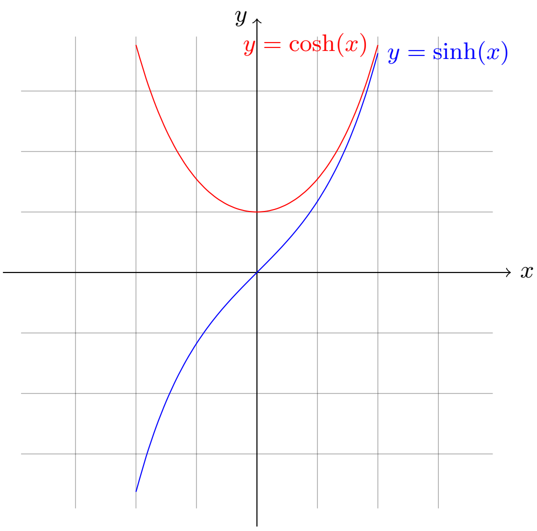
(2) On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ch(x) = +\infty$.

**Propriété 34** (étude de la fonction $sh$)

(1) La fonction $sh$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = ch(x)$.

(2) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$.

Tableau de variations de $ch$ et $sh$ et leur graphe :




**Remarque.** Vous avez déjà rencontré des cosinus hyperboliques dans votre vie quotidienne : la forme d'un câble suspendu dans le vide entre deux points est une chaînette d'équation

$$y = a \cdot ch\left(\frac{x}{a}\right)\ \text{ où } a > 0.$$

## 4.5 Les fonctions circulaires

**Définition.**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le cercle trigonométrique et on note $M$ un point du cercle tel que l'angle de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$:

- On appelle alors **fonction cosinus** la fonction notée cos définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos(x) = x_M$.
- On appelle alors **fonction sinus** la fonction notée sin définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin(x) = y_M$.
- Enfin, on définit la **fonction tangente** sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = y_P$

**Propriété 35** (étude de la fonction cos)

La fonction cos est paire, $2\pi$-périodique, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Tableau de variations de cos et son graphe :

**Propriété 36** (étude de la fonction sin)

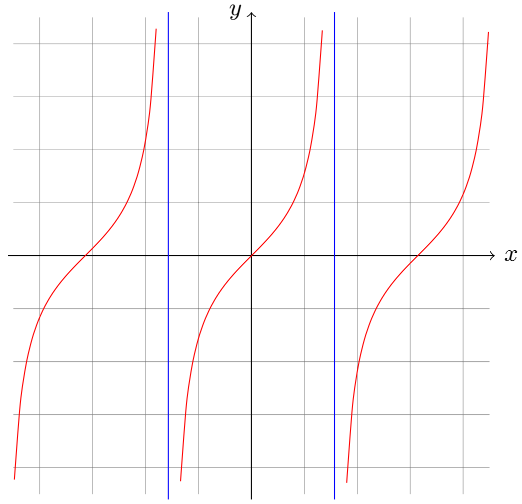
La fonction sin est impaire, $2\pi$-périodique, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

Tableau de variations de sin et son graphe :

**Propriété 37** (étude de la fonction tan)

La fonction tan est impaire, $2\pi$-périodique, continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$), et pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Tableau de variations de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et son graphe :




**Remarque.** Revoir le formulaire pour les valeurs usuelles, les formules de transformations de sommes en produits ...

**Propriété 38** (formes indéterminées en 0)

On a:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ (3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

**Définition.**

Soit $a > 0$. On dit que deux nombres réels $x$ et $y$ sont congrus modulo $a$, noté $x \equiv y \ \ [a]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$.

**Propriété 39**

(1) Si $x \equiv y \ \ [a]$ et $u \equiv v \ \ [a]$, $x + u \equiv y + v \ \ [a]$.

(2) Si $x \equiv y \ \ [a]$ et si $b \in \mathbb{R}^*$, $xb \equiv yb \ \ [ab]$.

**Propriété 40** (Cas d'égalité des fonctions trigonométriques)

(1) On a $\cos x = \cos y$ si et seulement si $x \equiv \pm y \ \ [2\pi]$.

(2) On a $\sin x = \sin y$ si et seulement si $x \equiv y \ \ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y \ \ [2\pi]$.

(3) On a $\cos x = \cos y$ et $\sin x = \sin y$ si et seulement si $x \equiv y \ \ [2\pi]$.

(4) On a $\tan x = \tan y$ si et seulement si $x \equiv y \ \ [\pi]$.

## 4.6 Fonctions circulaires réciproques

**Propriété 41**

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective.

(2) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est bijective.

(3) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est bijective.

**Définition.**

- La bijection réciproque de cos : $[0,\pi] \to [-1,1]$ est appelée **arccosinus** et noté : $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.
- La bijection réciproque de sin : $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est appelée **arccsinus** et noté : $\arccos : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
- La bijection réciproque de tan : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est appelée **arctangente** et noté $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

**Propriété 42** (Arccos)

(1) arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et : $\forall x \in ]-1;1[$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

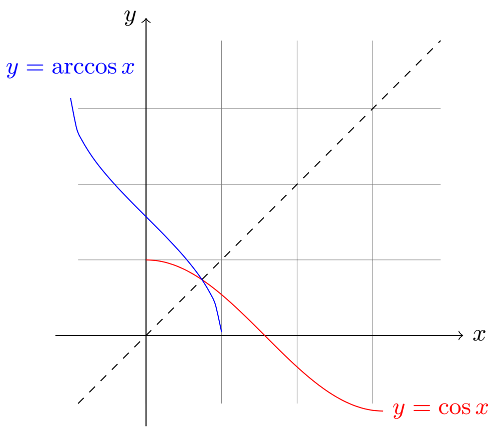
Ainsi, arccos est strictement décroissante sur $]-1;1[$.

(2) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$

(3) En revanche, $\arccos(\cos(x)) = x$ uniquement si $x \in [0;\pi]$

**Preuve.** $\cos : ]0,\pi[ \to ]-1,1[$ est bijective, dérivable, et pour $x \in ]0,\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$.
Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arccos est dérivable sur $]-1;1[$, et pour tout $x \in ]-1,1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sin(\arccos x)}$. D'autre part, pour tout $x \in ]-1;1[$, $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$, donc $\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2$ puis $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Or, $\arccos x \in [0,\pi]$ et sin est positif sur cet intervalle, donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ et on a ainsi prouvé le résultat voulu. □

Tableau de variations de arccos et son graphe :




**Propriété 43** (Arcsin)

(1) arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et : $\forall x \in ]-1;1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, arcsin est strictement croissante sur $]-1;1[$.

(2) arcsin est impaire.

(3) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$

(4) En revanche, $\arcsin(\sin(x)) = x$ uniquement si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

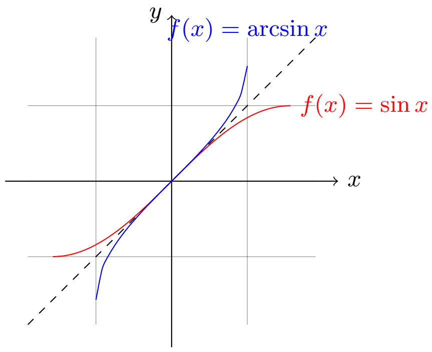
**Preuve.**

- $\sin : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to ]-1,1[$ est bijective, dérivable, et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$.
  Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et pour $x \in ]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$.
  D'autre part, pour tout $x \in ]-1;1[$, $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$, donc $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ puis $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
  Or, $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et cos est positif sur cet intervalle, donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ et on a ainsi le résultat voulu.

- En posant $f = \sin$, on a, pour tout $x \in [-1,1]$:
  $f \circ f^{-1}(-x) = -x = -f \circ f^{-1}(x) = -f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(-f^{-1}(x)\right)$ car $f$ est impaire. En appliquant $f^{-1}$ à chacun des membres de cette dernière égalité, on déduit que $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$, ce qui montre que $f^{-1}$ est impaire.

$\square$

Tableau de variations de arcsin et son graphe :




**Propriété 44** (Arctan)

(1) arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Ainsi, arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) arctan est impaire.

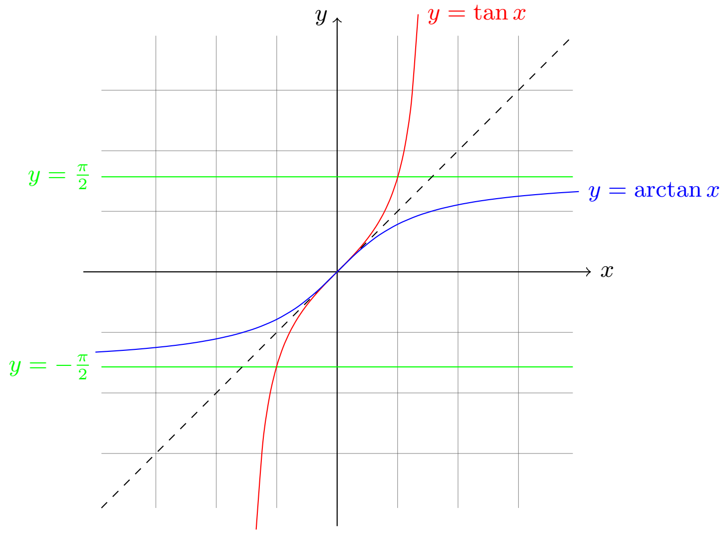
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

(4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$

(5) En revanche, $\arctan(\tan(x)) = x$ uniquement si $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

**Preuve.** • $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est bijective, dérivable, et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$. Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arctan est dérivable, et pour tout $x \in ]-1,1[$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. $\square$

Tableau de variations de arctan et son graphe :




► *Pour montrer une égalité faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques, on peut essayer de montrer que les cosinus/sinus/tangentes des deux membres sont égaux. Attention, ceci ne montre qu'une congruence entre les deux termes. Il faut ensuite avoir un encadrement des deux membres pour la transformer en égalité.*

**Propriété 45**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \text{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}$

**Preuve.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{\tan(\arctan(\frac{1}{x}))} = x = \tan(\arctan(x))$, donc $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \equiv \arctan x \quad [\pi]$.
Or $\arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (car $x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$) donc $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc on a égalité.
Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, on applique l'égalité obtenue à $-x > 0$. □

# Formules sur les dérivées

Terminons le chapitre en rappelant toutes les formules utiles sur la dérivation.

### Dérivées usuelles

| On considère $f$ définie par $f(x) = ...$ | alors $f$ est dérivable sur $I = ...$ | et $\forall\, x \in I,\ f'(x) = ...$ |
|---|---|---|
| $a$ constante | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x^n,\ n \in \mathbb{N}\ (x \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}\ (x \in [0, +\infty[)$ | $]0, +\infty[$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\dfrac{1}{x}\ (x \in \mathbb{R}^*)$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| $e^x\ (x \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ |
| $\ln(x)\ (x \in ]0, +\infty[)$ | $]0, +\infty[$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\ (x \in ]0, +\infty[)$ | $]0, +\infty[$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |

### Dérivation et opérations

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I$. Alors:

(1) Pour tout $x \in I$,

$(i)$ $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$,

$(ii)$ $(\lambda.u)'(x) = \lambda u'(x)$,

$(iii)$ $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,

$(iv)$ $(u^\alpha)'(x) = \alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$, où $\alpha > 0$.

(2) Si, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$,

$$\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

(3) Si, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

(4) Si, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$,

$$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

(5) Pour tout $x \in I$,

$$(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$