TD9

Ensembles usuels de nombres

Exercice 2

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. Montrer que $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

Solution.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\dfrac{ax+b}{cx+d} = q$. Ainsi, $ax+b = q(cx+d)$ et $(a-cq)x = dq - b$.

Si $a = cq$ alors, $dq = b$ donc : $\left\{\begin{array}{l} ad = cdq \\ \text{et} \\ bc = cdq \end{array}\right.$ Ainsi, on aurait alors $ad = bc$ ce qui est exclu. Ainsi, $a \neq cq$.

On peut donc diviser par $a - cq$ et on obtient : $x = \dfrac{dq-b}{a-cq} \in \mathbb{Q}$. Absurde.

Ainsi, $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Solution.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

- On a :
$$\begin{aligned} & \lfloor nx \rfloor \leq nx \\ \text{donc } & \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \\ \text{ainsi, } & \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor \text{ car la fonction partie entière est croissante} \end{aligned}$$

  De plus, on sait que : $n\lfloor x \rfloor \leq nx$, par définition de la partie entière de x. Ainsi, $n\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à nx donc inférieur au plus grand entier inférieur ou égal à nx : $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. On en déduit donc que : $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. $\lfloor x \rfloor$ est un entier qui minore $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ donc $\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.
  Finalement, $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.

- Notons $p = \lfloor nx \rfloor$. Pour $k[|0, n-1|]$, on a alors : $p \leq nx < p+1$ donc $\dfrac{p+k}{n} \leq x + \dfrac{k}{n} < \dfrac{p+k+1}{n}$.
  En réalisant la division euclidienne de p par n, il existe $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = qn + r$ et 0‘$r \leq n-1$.
  En remplaçant dans l'inégalité précédente, on obtient :
$$q + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}$$

  ► Si $r = 0$, alors pour tout $k \in [|0, n-1|]$,
$$q \leq q + \frac{k}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+1}{n} \leq q + \frac{n-1+1}{n} = q + 1.$$

Dans ce cas, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = q$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} q = nq = p = \lfloor nx \rfloor$.

- Si $1 \leq r \leq n-1$, alors pour $0 \leq k \leq n-r-1$ on a :

$$q \leq q + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n} \leq q + \frac{n-r-1+r+1}{n} = q+1,$$

et dans ce cas $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = q$ et si $n-r \leq k \leq n-1$, on a :

$$q+1 = q+\frac{n-r+r}{n} \leq q+\frac{k+r}{n} \leq x+\frac{k}{n} < q+\frac{k+r+1}{n} \leq q+\frac{n-1+r+1}{n} < q+\frac{n+n}{n} = q+2,$$

et dans ce cas, $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = q+1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1} (q+1) = \sum_{k=0}^{n-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1} 1 = nq + ((n-1)-(n-r-1)) = nq+r = p = \lfloor nx \rfloor.$$

Dans tous les cas, on a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$
