TD5

Primitives

Exercice 9

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$$

1. Etablir une formule de récurrence
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2} \sin x dx$.

   On effectue une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & x^{n+2} & & \sin(x) \\
 & & \searrow & \\
- & (n+2)x^{n+1} & & -\cos(x) \\
 & & \searrow & \\
+ & (n+2)(n+1)x^n & \xleftarrow{\int} & -\sin(x)
\end{array}$$

   Les fonctions $x \mapsto x^{n+2}$ et $x \mapsto -\sin(x)$ étant de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on obtient :

$$I_{n+2} = (n+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+2)(n+1)I_n,$$

   ou pour tout $n \geq 2$,

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - 2p(2p-1)I_{2p-2}$ Or $I_{2p-2} = (2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2-1} - (2p-2)(2p-2-1)I_{2p-2-2} = (2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} - (2p-2)(2p-3)I_{2p-4}$. D'où en remplaçant :

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - 2p(2p-1)\left((2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} - (2p-2)(2p-3)I_{2p-4}\right) \\
&= (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - (2p)(2p-1)(2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} + (2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)I_{2p-4} \\
&= \frac{(2p)!}{(2p-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - \frac{(2p)!}{(2p-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} + \frac{(2p)!}{(2p-4)!}I_{2p-4}
\end{aligned}$$

   On obtient alors la formule de récurrence suivante :

$$I_{2p} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \frac{(2p)!}{(2p-2i-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2i-1} + \frac{(2p)!}{(2p-2k)!}I_{2p-2k}$$

On obtient finalement en prenant $k = p$:

$$I_{2p} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \frac{(2p)!}{(2p-2i-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2i-1} + \frac{(2p)!}{0!} I_{2p-2p}$$
$$I_{2p} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \frac{(2p)!}{(2p-2i-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2i-1} + (2p)! I_0$$

Or, $I_0 = 1$. Donc, $I_{2p} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \frac{(2p)!}{(2p-2i-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2i-1} + (2p)!$.

De la même manière,

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= (2p+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p) I_{2(p-1)+1} \\ &= (2p+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p)(2p-1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2} + (2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2) I_{2(p-2)+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i (2p+1)!}{(2(p-i))!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(p-i)} + (-1)^k \frac{(2p+1)!}{2((p-k)+1)!} I_{2(p-k)+1} \end{aligned}$$

On obtient finalement en prenant $k = p$:

$$I_{2p+1} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (2p+1)!}{(2(p-i))!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(p-i)} + (-1)^p (2p+1)! I_1$$

Or, $I_1 = 1$ (par intégration par partie). Donc :

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-1)^i (2p+1)!}{(2(p-i))!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(p-i)} + (-1)^p (2p+1)! \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i (2p+1)!}{(2(p-i))!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(p-i)} \end{aligned}$$