TD4

Nombres complexes et trigonométrie

Notations algébrique et trigonométrique

Exercice 1

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Déterminer la forme algébrique de :

a) $z_1 = (2+i)e^{3i\theta}$,

b) $z_2 = (1-2i)e^{-i\theta}$,

c) $z_3 = \dfrac{e^{2i\theta}}{1-i}$,

d) $z_4 = (\sqrt{3}-i)^{2015}$,

e) $z_5 = (1+e^{i\theta})^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

f) $z_6 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 3

Trouver les modules et arguments de

a) $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

b) $z_2 = -2i(2+2i)$

c) $z_3 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$

d) $z_4 = 1 + i\tan\theta$

e) $z_5 = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$

f) $z_6 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$

g) $z_7 = (1+i)^n$

Exercice 4

Pour quelles valeurs de n, le nombre complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 5

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\omega \in \mathbb{R}$ tel que chaque fonction s'écrive sous la forme $A\cos(x-\omega)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(x) + \sin(x)$ *b)* $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$

Trigonométrie - Linéarisation - Sommes

Exercice 6

Calculer la fraction $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Exercice 7

Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et en déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 8

Linéariser $\cos^2 x$, $\sin^4 x$ et $\cos x \sin^4 x$.

Exercice 9
Calculer les sommes suivantes ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$A = \sum_{k=0}^{n} \sin(ka) \qquad B = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \qquad C = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) \qquad D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$$

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la somme : $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^k(x)\sin(kx)$

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Exercice 11
Déterminer les racines carrées de $1+6i$ et $24i-7$

Exercice 12
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$

b) $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$

c) $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

d) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

e) $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$

f) $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$

Exercice 13
a) Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$.

(i) Montrer qu'elle a une racine z_0 réelle.
(ii) En déduire toutes les solutions de l'équation.

b) Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$

(i) Montrer qu'elle a une racine z_0 imaginaire pure.
(ii) En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 14
Déterminer tous les couples de complexes x et y vérifiant $\begin{cases} x+y = 1+i \\ xy = 2-i \end{cases}$

Racines n-ième

Exercice 15
a) Donner les racines cinquièmes de $\dfrac{1+i}{1-i}$.

b) Sachant que $(2+4i)^6 = 7488 + 2816i$, donner les racines sixièmes de $7488 + 2816i$.

Exercice 16
a) Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad z^2 - z + 1 - i = 0$.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\quad z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 17
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$

b) $z^5 = -i$

c) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$

d) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta)$

e) $(z+1)^n = (z-1)^n$

f) $4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0$

g) $z^n = \overline{z}$

Exercice 18
On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ puis u^2 en fonction de u.
2. En déduire la valeur de $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Exercice 19
Montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}$$

On pourra considérer les solutions de $z^{11} = -1$.

Exercice 20
Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

a) Calculer $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$ où $p \in \mathbb{N}$.

b) Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.

Exercice 21
Soit n un entier non nul fixé. Résoudre $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$. Calculer le produit des racines non nulles.

Exponentielle complexe

Exercice 22
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $e^z = 3$

b) $e^z = i$

c) $e^z = 3i$

d) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 23

a) À quelle condition les points les points d'affixes a, b et c forment-ils un triangle équilatéral?

b) Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

(i) 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.

(ii) z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont-ils alignés.

(iii) z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 24

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

a) $|z+i| = |z-1|$

b) z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.

c) $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$

d) $z + \bar{z} = z\bar{z}$

Exercice 25

D'après Concours Centrale-SupElec PSI

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note p et q ses deux racines carrées. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M.

Exercice 26

Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

a) L'homothétie f de centre 1 d'affixe $4i$ et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

b) La rotation g de centre 1 d'affixe -2 et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

c) La translation h de vecteur d'affixe $4-2i$.

Exercice 27

À tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$. Etablir que : $|z'| = 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur. En déduire une construction géométrique du point M'.

Exercice 28

On considère la transformation du plan complexe définie par $z' = 2iz + 5$.

a) Montrer que cette transformation admet un unique point fixe M_0 d'affixe z_0.

b) Ecrire la transformation dans le repère d'origine M_0, puis la reconnaître.
