TD4

Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 27

À tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$. Etablir que : $|z'| = 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur. En déduire une construction géométrique du point M'.

Solution.

- $|z'| = \dfrac{|z-1|}{|1-\overline{z}|} = \dfrac{|z-1|}{|\overline{1-z}|} = \dfrac{|z-1|}{|1-z|} = 1.$

Le point M' d'affixe z' est sur le cercle unité.

- $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{1-\overline{z}} - 1}{z-1} = \dfrac{(z-1)-(1-\overline{z})}{(1-\overline{z})(z-1)} = -\dfrac{z+\overline{z}-2}{(z-1)(\overline{z-1})} = -\dfrac{2Re(z)-2}{|z-1|^2} \in \mathbb{R}.$

Si on note A le point d'affixe 1, on en déduit que les points A, M et M' sont donc alignés.

- $\dfrac{z'+1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{1-\overline{z}} + 1}{z-1} = \dfrac{(z-1)+(1-\overline{z})}{(1-\overline{z}))(z-1)} = -\dfrac{z-\overline{z}}{(z-1)(\overline{z-1})} = -\dfrac{2iIm(z)}{|z-1|^2} \in i\mathbb{R}.$

Si on note B le point d'affixe -1, on en déduit que le triangle $AM'B$ est rectangle en M'.

On déduit de ces conditions (plus précisément des deux premières conditions) que M' est le point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle unité.