TD3

Fonctions usuelles

Logarithme - Exponentielle - Puissances

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

a) $2^{x^2} = 3^{x^3}$

b) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

c) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

d) $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$

e) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, avec $a > 0, a \neq 1$.

f) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équation suivants :

$a) \left\{ \begin{array}{c} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{array} \right.$ $b) \left\{ \begin{array}{c} x+y=7 \\ \log(x)+\log(y)=1 \end{array} \right.$ $c) \left\{ \begin{array}{c} xy = a^2 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 \end{array} \right.$

Exercice 3

Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in]0,1[$.

Exercice 4

a) Montrer que pour tout $x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$. Interpréter graphiquement l'inégalité de droite.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ avec $1 < a < b$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Exercice 6

On pose $f(x) = x^x$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f, et étudier les variations de la fonction f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

c) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d) Tracer la courbe représentative de f.

Fonctions hyperboliques

Exercice 7
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{sh}(x) \leq 2$
2. $\mathrm{ch}(x) = 3$
3. $7\mathrm{ch}x + 2\mathrm{sh}x = 9$

Exercice 8
Étudier et tracer l'allure approximative du graphe de $f : x \mapsto x\mathrm{ch}x$.

Exercice 9
Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{sh}(a+b) = (\mathrm{ch}(a)+\mathrm{sh}(a))(\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(b))$ et $\mathrm{ch}(a+b)-\mathrm{sh}(a+b) = (\mathrm{ch}(a)-\mathrm{sh}(a))(\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(b))$.

En déduire les formules d'addition de trigonométrie hyperbolique ($\mathrm{ch}(a + b)$ et $\mathrm{sh}(a + b)$ en fonction de $\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{ch}(b)$, $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{sh}(b)$).

Exercice 10
1. Calculer $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{sh}x$ et $\mathrm{ch}x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Simplifier $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{ch}(2^{-k}x) = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) \times \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11
1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. Calculer
$$C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(a + kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(a + kb).$$
2. En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathrm{ch}(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}$.

Fonctions circulaires

Exercice 12
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 13
Résoudre les équations suivantes, de variable $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$

c) $2\cos(2x) = \sqrt{3}$

d) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$

e) $\cos(2x) = \cos(x)$

f) $\sin(2x) + \sin x = 0$

g) $\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

h) $\cos(3x) + \sin x = 0$

i) $\cos x - \cos(2x) = \sin(3x)$

j) $\cos x + \sin x = 2$

k) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x :

a) $\cos x > 0$

b) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

c) $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\sin^2(x) \geq \dfrac{1}{4}$ sur $[-\pi, \pi]$

Exercice 15
Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de $f : x \mapsto (1 + \sin x)^{\cos x}$.

Fonctions circulaires réciproque

Exercice 16
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$

b) $\arccos(\cos(4\pi))$

c) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

d) $\arctan\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

e) $\cos(\arctan x)$, $x \in \mathbb{R}$

f) $\sin(3\arctan x)$, $x \in \mathbb{R}$

g) $\tan(\arcsin x)$, $x \in]-1, 1[$

h) $\arccos x + \arccos(-x)$, $x \in [-1, 1]$

i) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

Exercice 17
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{9}$
2. $\arccos x = \arcsin x$
3. $\arccos x = \arcsin(2x)$
4. $\arccos x = \arcsin(1 - x)$
5. $2\arcsin x = \arccos|2x^2 - 1|$
6. $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \pi$
7. $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$
8. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$
9. $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 18
Après avoir précisé le domaine de validité, montrer les formules :

1. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;
2. $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$;
3. $\arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;
4. $2\arctan(\sqrt{1 + x^2} - x) + \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 19
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,; \qquad g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Exercice 20
Etudier les variations de la fonctions suivante et tracer sa courbe représentative : $f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Exercice 21
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme S_n en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

a) Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan x$.

b) En déduire la valeur de S_n. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

À chercher

Exercice 22
Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$$

Exercice 23
a) Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Calculer $\arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y-x}{y+x}$.

b) Calculer $4\arctan\frac{1}{5}$.

c) À l'aide des questions précédentes, montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Cette formule permit à John Machin de calculer cent décimales de π en 1706.

Exercice 24
Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 25
Étudier la fonction $f(x) = (x-1)^2 \arctan x$