TD3

Calculs algébriques

Calcul de sommes et de produits

Exercice 1

Soit n un entier naturel. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k+4k+n-3)$;

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$;

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.

h) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 2

Calculer de deux façons différentes $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$ pour trouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Calculer de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

a) Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

b) En déduire la valeur de S_n.

Coefficients binomiaux

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 5

En utilisant la fonction polynomiale $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

b) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$;

c) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$;

d) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

a) En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.

b) En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

a) Écrire $z = (1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire la valeur des sommes S_n et T_n.

Sommes doubles

Exercice 8
Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

$$\sum_{0 \le i,j \le n} (i+j)^2, \quad \sum_{0 \le i < j \le n} ij, \quad \sum_{1 \le i,j \le n} \min(i,j), \quad \sum_{0 \le i,j \le n} x^{i+j} \quad (x \in \mathbb{C}), \quad \text{et} \quad \sum_{0 \le i \le j \le n} \frac{i}{j+1}.$$

Exercice 9
Soit n un entier naturel non nul. Calculer successivement :

$$\sum_{0 \le i,j \le n} (i+j), \quad \sum_{1 \le i,j \le n} \min(i,j), \quad \sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \le i,j \le n} |i-j|.$$

Exercice 10
Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j$.

a) Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

b) Démontrer que $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.

c) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

d) Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

Exercice 11
Soit n un entier naturel non nul et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2 \sum_{1 \le p < q \le n} z_p z_q.$$