TD23

Déterminant

Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix}$

Exercice 2

Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\forall i,j \in [|1,n|], \quad a_{i,j} = \min(i,j)$.

Exercice 3 (Déterminants circulants)

On considère n nombres complexes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, on pose $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$, puis :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_p = a_0 + a_1\omega^p + a_2\omega^{2p} + \dots + a_2(\omega^p)^{n-1}.$$

On désigne par A et M les deux matrices d'ordre n suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Calculer M^2 et en déduire son déterminant.

b) Calculer AM et MAM en fonction de $S_0, \dots, S_{n-1}$, et en déduire le déterminant de A.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

Exercice 5

Calculer $\det(A)$ où $A = (|i-j|)_{i,j \in [|1,n|]}$.

Exercice 6

Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, montrer que $\det(A) = 0$. Généraliser.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $M_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n$.

Exercice 8

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a+b & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$.

Exercice 9

Calculer les déterminants $n \times n$ suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \quad ; \quad B_n \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 10

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. On souhaite calculer $D_n = \begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & c \end{vmatrix}$.

a) Montrer que le déterminant suivant est un polynôme de degré au plus 1 :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+X & c+X & \dots & c+X \\ b+X & a+X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+X \\ b+X & \dots & b+X & c+X \end{vmatrix}.$$

b) Calculer $D_n(-b)$ et $D_n(-c)$ et en déduire D_n pour tout $b \neq c$ et $b = c$.

Exercice 11 (Déterminant de Van der Monde)

On considère $n+1$ éléments $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et le déterminant suivant :

$$D(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

On donne trois méthodes pour calculer ce déterminant.

a) Méthode 1. Calculer $D(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes.

b) Méthode 2. On considère le déterminant suivant :

$$D(a_0, a_1, \ldots, X) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^n \\ 1 & X & X^2 & \ldots & X^n \end{vmatrix}.$$

(i) Justifier que $D(a_0, a_1, \ldots, X)$ est un polynôme.

(ii) Déterminer la factorisation de $D(a_0, a_1, \ldots, X)$ dans $\mathbb{K}[X]$.

(iii) Conclure.

c) Méthode 3. On considère les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{K}_n[X]$ associés à $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$D(a_0, a_1, \ldots, a_n) = det_{\mathcal{B}}(L_0, L_1, \ldots, L_n)$$

où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 12

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq \eta \Rightarrow A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 13

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que

$$A' = P^{-1}AP \qquad \text{(on dit alors que les matrices sont semblables dans } \mathbb{C}\text{).}$$

Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A' = Q^{-1}AQ$, i.e. que A et A' sont semblables dans $\mathbb{R}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs

Exercice 14

Utiliser un déterminant pour montrer que les familles suivantes sont des bases de E :

a) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$;

b) $E = \mathbb{C}^3$ et $e_1 = (1+i, 1, i)$, $e_2 = (i, -1, 1-i)$, $e_3 = (-2+i, 0, -i)$.

Exercice 15

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que $((1, \cos(a), \cos^2(a)), (1, \cos(b), \cos^2(b)), (1, \cos(c), \cos^2(c)))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16
Établir, si $a_0, \dots, a_n$ sont $n+1$ scalaires distincts, que les $n+1$ polynômes définis pour tout $0 \leq k \leq n$ par $P_k(X) = (X - a_k)^n$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 17
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} \cos(a_1+a_1) & \cos(a_1+a_2) & \dots & \cos(a_1+a_n) \\ \cos(a_2+a_1) & \cos(a_2+a_2) & \dots & \cos(a_2+a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n+a_1) & \cos(a_n+a_2) & \dots & \cos(a_n+a_n) \end{vmatrix}$.

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 18
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$u_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad M \mapsto AM$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.

Exercice 19
Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré ≤ 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

Exercice 20
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) On pose $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (0,1,1,0), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (-1,0,0,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer $B = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

c) Déterminer $\det(B), \det(f)$ et $\det(A)$.

Application aux systèmes linéaires

Exercice 21
Résoudre chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$
