TD21

Séries numériques

Séries à termes positifs

Exercice 1

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$ | b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ | c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes (éventuellement suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$) :

a) $\displaystyle\sum \frac{n}{n^2+1}$

b) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2-\ln n}$

c) $\displaystyle\sum n - \sin\frac{1}{n}$

d) $\displaystyle\sum n.\sin\frac{1}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$

f) $\displaystyle\sum \frac{n^2\ln n}{e^n}$

g) $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)n^2}$

h) $\displaystyle\sum \frac{\arctan n}{n^2}$

i) $\displaystyle\sum \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$

j) $\displaystyle\sum (\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})$

k) $\displaystyle\sum \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)(\ln n)^{1000}$

l) $\displaystyle\sum \sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$

m) $\displaystyle\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$

n) $\displaystyle\sum \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$

o) $\displaystyle\sum \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$

Exercice 3

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\prod_{k=1}^n(2k)}{n^n} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln n}{n!} \quad ; \quad u_n = \frac{2^n(\sin\alpha)^{2n}}{n^2} \text{ où } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 4

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Étudier les séries de termes généraux:

a) $\max(u_n, v_n)$; | b) u_n^2 ; | c) $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$; | d) $\sqrt{u_n u_{2n}}$.

Exercice 5

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n}\sqrt{\sin x}\,dx$.

Exercice 6

Étudier, selon la valeur de p la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 7

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective. Montrer que la série $\sum \dfrac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 8

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{a_n}{(1+a_0)\dots(1+a_n)}$.

a) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_n$ diverge.

Exercice 9

a) Soit $x \in [-1,1]$, simplifier $\sin(\arccos x)$. En déduire un équivalent de arccos en 1.

b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite de réels positifs. Étudier, selon la nature de $\sum u_n$ la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Exercice 11

Soit (u_n) une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Montrer que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 12 (Série de Bertrand)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 13

L'objectif est de démontrer la règle de Raabe-Duhamel: soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(n^a u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^a}\right)$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.

c) Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n$ converge ?

d) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 14
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ (si la série de terme général u_n converge).
Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de :

a) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand la série de terme général u_n diverge.

b) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ quand la série de terme général u_n converge.

Comportement asymptotique des sommes

Exercice 15
On considère la série harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) En minorant $H_{2n} - H_n$, montrer que la série harmonique diverge.

b) Montrer la convergence de la suite définie par $u_n = H_n - ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*on pourra étudier la nature de la série* $\sum(u_{n+1} - u_n)$).

En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

c) Montrer de même que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

d) Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{H_n}{1+2+\cdots+n}$ et $\sum \dfrac{H_n}{n}$.

Exercice 16
a) Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Déterminer un équivalent de (S_n).

b) Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

(i) Donner un équivalent R_n.

(ii) Étudier la convergence de $\sum \dfrac{R_n}{S_n}$ suivant les valeurs de α.

Exercice 17
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

a) On suppose que $\sum v_n$ converge.

(i) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

b) On suppose que $\sum v_n$ diverge.

(i) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

c) (i) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$.

(ii) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + c + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Séries à termes de signes quelconques

Exercice 18

a) (i) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

(ii) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.

b) Montrer que: $\displaystyle\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$. Quel est l'intérêt de cette inégalité?

Exercice 19

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants:

a) $u_n = \cos n \left(1 - \cos \dfrac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$;

c) $u_n = \dfrac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$;

d) $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{\sin(u_n)}{n}$.

Exercice 20

Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+an}, \quad a \in \mathbb{R} \quad ; \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}.$$

Exercice 21

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

a) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$;

b) $u_n = \sin\left(\pi \dfrac{n^3+1}{n^2+1}\right)$;

c) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x \ln(x)} dx$.

Exercice 22

Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

a) $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$;

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$;

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.
